6POLITECNICO DI BARI

4° Appello di Geometria e Algebra

A.A. 2017/2018 – Data: 11 giugno 2018

COGNOME: ___________________________ NOME: ______________________

MATRICOLA: __________________________ ANNO DI CORSO: ____________

Q1) Dopo aver dato la definizione di vettori linearmente dipendenti, stabilire la lineare dipendenza/indipendenza dei vettori $u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (4,-2,2)$.

Q2) Dopo aver dato la definizione di endomorfismo, dimostrare che ogni endomorfismo surgettivo è ingettivo.

Q3) Data la matrice A = $\begin{pmatrix} +3 & +2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, determinare autovalori e autovettori di A, specificando la molteplicità algebrica e geometrica di ciascun autovalore.

Q4) Sia A la matrice assegnata nel quesito Q3.

a) Calcolare l'endomorfismo f di R^3 avente A come matrice associata rispetto alla base canonica di R^3;

b) calcolare il sottospazio Im(f), una sua base e la dimensione;

c) calcolare il sottospazio Ker(f), una sua base e la dimensione;

d) dire se l'endomorfismo f è ingettivo, surgettivo, bigettivo.

Q5) Fissato un riferimento cartesiano nello spazio euclideo S_3, siano $\vec{v}_1 = (-1, 1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (0, -1, -3)$ due vettori di S_3.

a) Determinare la retta r passante per P(2,0,-1), ortogonale a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$;

b) determinare il piano π passante per r, ortogonale al piano π' di equazione x - 2y + z – 3 = 0.

Q6) Data la conica di equazione $x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 4y = 0$,

a) classificare la conica (genere e specie)

b) calcolare l'equazione canonica con il metodo degli invarianti.

FOGLIO DELLE RISPOSTE

(Q1) Sul foglio

(Q2) Sul foglio

(Q3)

Autovalori: ____________________________________

Autovettori:____________________________________

Molteplicità:____________________________________

(Q4)

(a) f:_____________________________________

(b) Im(f) = __________________________; $B_{Im(f)}$ = ______________________; dim Im(f) = _____

(c) Ker(f) =__________________________; $B_{ker(f)}$ = _____________________; dim ker(f) = ___

(Q5)

(a) Equazioni di r: $\begin{cases} \\ \end{cases}$

(b) Equazione di π: ______________________

(Q6)

(a) Genere:_________________; Specie:______________________;

(b) Equazione canica: ______________________.

Soluzione

(Q1) Se $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ sono n vettori dello spazio vettoriale V(K), si dice che

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)\ \textit{sono linearmente dipendenti} \Leftrightarrow \exists (k_1, k_2, \dots, k_n) \in K^n, \textit{non tutti nulli,}$$
tali che

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n = 0.$$

Verifichiamo la L.D./L.I dei vettori $u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (4, -2, 2)$ di R^3.
Poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - (0 - 2 - 2) = -4 + 4 = 0$$

I tre vettori sono linearmente dipendenti.

(Q2) Se V(K) è uno spazio vettoriale su K di dimensione n, si dice endomorfismo su V(K) ogni applicazione lineare di V(K) in se, cioè:

$$(f \text{ è } un\ endomorfismo\ su\ V(K)) \Leftrightarrow$$
$$\left(f: V \longrightarrow V \ \exists' \ \forall u, v \in V, \forall k \in K: \begin{cases} 1)\ f(u + v) = f(u) + f(v) \\ 2)\ f(k \cdot v) = k \cdot f(v) \end{cases} \right)$$

Dimostriamo che se f è un endomorfismo surgettivo allora f è anche ingettivo.
Poiché f è un endomorfismo surgettivo $\Longrightarrow Im(f) = f(V) = V \Longrightarrow \dim Im(f) = \dim V = n$.
Quindi, per il teorema della dimensione, si ha:
$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim V \Longrightarrow \dim Ker(f) = dimV - \dim Im(f) = 0 \Longrightarrow$ %
$\Longrightarrow \dim Ker(f) = 0 \Longrightarrow f \text{ è } ingettiva.$

(Q3) Sia A = $\begin{pmatrix} +3 & +2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcoliamo gli autovalori di A risolvendo l'equazione: $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\det(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix}) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)+2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \wedge \lambda_3 = 1$$

Dunque, la matrice A ha due autovalori distinti:

- $\lambda_{1-2} = 2,$ di molteplicità algebrica m$_a$(λ_{1-2} = 2) = 2 e

- $\lambda_3 = 1$, di molteplicità algebrica m_a($\lambda_3 = 1$) = 1.

b) Calcoliamo gli autovettori associati agli autovalori.

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è un autovettore associato a $\lambda_{1-2} = 2$, allora, deve aversi: $AX = \lambda X \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} +3 & +2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$.

Pertanto, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda_{1-2} = 2$ sono:

$$X = (-2x_2, x_2, x_3).$$

L'autospazio generato da $\lambda_1 = 2$ è:

$$V_{\lambda=2} = \{(-2x_2, x_2, x_3)\} = \{(-2x_2, x_2, 0) + (0,0,x_3)\} = \{x_2(-2,1,0) + x_3(0,0,1)\}.$$

Una base di $V_{\lambda=2}$ è $B = \{(-2,1,0),(0,0,1)\} \Rightarrow$ m_g($\lambda_{1-2} = 2$) = 2.

Se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è un autovettore associato a $\lambda_3 = 1$, allora, deve aversi:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +3 & +2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ -x_1 + 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}.$$

Pertanto, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda_3 = 1$sono:

$$X = (x_1, -x_1, -x_1).$$

L'autospazio generato da $\lambda_3 = 1$ è:

$$V_{\lambda_3=1} = \{(x_1, -x_1, -x_1)\} = \{x_1(1,-1,-1)\}.$$

Una base di $V_{\lambda_3=1}$ è $B = \{(1,-1,-1)\} \Rightarrow$ m_g($\lambda_3 = 1$) = 1.

(Q4) (a) Calcoliamo l'endomorfismo $f: R^3 \to R^3$ avente A come matrice associata.

Se indichiamo con X = (x,y,z) ed X' = (x',y',z') gli elementi corrispondenti nell'endomorfismo f, deve aversi:

$$X' = A \cdot X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -x \\ -x-2y+2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x+2y \\ y' = -x \\ z' = -x-2y+2z \end{cases}$$

Dunque:

$$f: R^3 \longrightarrow R^3 \ni' \forall (x,y,z) \in R^3 : f(x,y,z) = (3x+2y, -x, -x-2y+2z).$$

(b) Calcoliamo il sottospazio Im(f), una sua base e la dimensione.

$$\forall u' \in \mathrm{Im}(f), \exists u \in R^3 \ni' u' = f(u) = f(x,y,z) = (3x+2y, -x, -x-2y+2z) =$$

$$= (3x,-x,-x) + (2y,0,-2y) + (0,0,2z) = x(3,-1,-1) + y(2,0,-2) + z(0,0,2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) =$ L((3,-1,-1),(2,0,-2),(0,0,2)).

Poiché i tre vettori (3,-1,-1),(2,0,-2),(0,0,2) sono L.I., una base di Im(f) è

$$B_{Imf} = \{(3,-1,-1),(2,0,-2),(0,0,2)\}$$

e dim Im(f) = 3.

(c) Calcoliamo il sottospazio Ker(f), una sua base e la dimensione.

$$\forall u \in Ker(f) : f(u) = 0 \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (3x+2y, -x, -x-2y+2z) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=0 \\ -x=0 \\ -x-2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall u \in Ker(f) : u = (0,0,0) \Rightarrow Ker(f) = \{0\} \; e \dim Ker(f) = 0.$$

(d) Poiché:

- dim Im(f) = 3 $\Rightarrow Im(f) = R^3 \Rightarrow f$ è $surgettiva$;
- $Ker(f) = \{0\} \Rightarrow f$ è $ingettiva$;
- f surgettiva e ingettiva ⟹ f è bigettiva.

(Q5) Siano P(2,0,-1), $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-1,1,2)$ e $\vec{v}_2 = -\vec{j} - 3\vec{k} = (0,-1,-3)$.

a) Sia r la retta di parametri direttori ℓ, m, n.

1) Poiché r è perpendicolare a $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-1,1,2) \Leftrightarrow \ell(-1) + m \cdot 1 + n \cdot 2 = 0$;

2) Poiché r è perpendicolare a $\vec{v}_2 = -\vec{j} - 3\vec{k} = (0,-1,-3) \Leftrightarrow \ell \cdot 0 + m(-1) + n(-3) = 0$.

Risolvendo il sistema fornito dalle due condizioni di perpendicolarità, si ha:

$$\begin{cases} -\ell + m + 2n = 0 \\ -m - 3n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\ell - 3n + 2n = 0 \\ m = -3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell = -n \\ m = -3n \end{cases}$$

Ne segue che la retta r deve avere parametri direttori

$$(-n, -3n, n) = (-1, -3, 1)$$

Di conseguenza la retta r passante per P(2,0,-1) e parametri direttori $(-1,-3,1)$ ha equazioni:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z+1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -z - 1 \\ y = -3z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 3z + 3 = 0 \end{cases}.$$

b) Poiché π passa per r, π appartiene al fascio avente r per sostegno, di equazione

$$\pi : x + z - 1 + k(y + 3z + 3) = 0 \Leftrightarrow x + ky + (1 + 3k)z + (3k - 1) = 0 .$$

Poiché π è perpendicolare al piano π’: x - 2y + z - 3 = 0, deve essere:

$$aa' + bb' + cc' = 0 \Leftrightarrow 1 - 2k + 1 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = -2 .$$

Quindi, il piano π ha equazione:

x – 2y - 5z -7 = 0.

(Q6) E’ data la conica di equazione $x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 4y = 0$.

(a) Le matrici associate alla conica sono: è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $I_2 = |A^{00}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 < 0 \Rightarrow$ la conica è un’iperbole

e poiché $I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - (-3 + 4 + 0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$la\ conica$ è non degenere.

(b) Calcoliamo gli autovalori di A^{00}.

$$\det(A^{00} - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3+\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + \lambda - 3\lambda - \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0.$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 4 = 5;\ \lambda_{1-2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

L'equazione canonica dell'iperbole è del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left(-1 + \sqrt{5}\right)x^2 - \left(1 + \sqrt{5}\right)y^2 + t = 0$$

la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \sqrt{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Imponiamo che $I'_3 = I_3 \Longrightarrow |B| = |A| \Longrightarrow -\left(-1 + \sqrt{5}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot t = 3 \Longrightarrow -4t = 3 \Longrightarrow t = -\frac{3}{4}$.

Quindi, l'equazione canonica dell'iperbole è:

$$\left(-1 + \sqrt{5}\right)x^2 - \left(1 + \sqrt{5}\right)y^2 - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(-1 + \sqrt{5}\right)x^2 - \left(1 + \sqrt{5}\right)y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3}{4\left(\sqrt{5} - 1\right)}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4\left(\sqrt{5} + 1\right)}} = 1.$$