ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA – II PARTE

LAUREA Ing. ________________________ 5 Novembre 2018

COGNOME: __________________________ NOME: ______________________________

(Q1) Risolvere il seguente sistema lineare $\begin{cases} x+y \quad\quad\; -t=1 \\ x+y+2z-t=2 \\ x \quad\quad\quad\quad\; +t=1 \end{cases}$.

(Q2) Dimostrare che l'insieme $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x-y=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e calcolare una base.

(Q3) Assegnata la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&3\end{pmatrix}$, determinare:

$a)$ *l'applicazione lineare ad essa associata rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$;

$b)$ *gli autovalori e i relativi autovettori*;

$c)$ *dire se la matrice* A è *diagonalizzabile*.

(Q4) Nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, *determinare*:

$a)$ *l'insieme dei vettori ortogonali al piano* $\pi: 3x+y-z-1=0$;

$b)$ *la distanza del punto* $P(1,3,-4)$ *dal piano* π.

(Q5) Dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale,

$a)$ *dimostrare che un'applicazione lineare* $f: V \longrightarrow V'$ *trasforma una base di* V *in un sistema di generatori di* $Im(f)$;

$b)$ *dire, sotto quale ipotesi aggiuntiva,* f *trasforma una base di* V *in una base di* V'.

(Q6) Assegnate due basi $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *e* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$ *di uno spazio vettoriale* V,

$a)$ *scrivere la matrice di passaggio dalla base* $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *alla base* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$;

$b)$ *scrivere le equazioni di passaggio dalla base* $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *alla base* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$.

Soluzione

(Q3)

(a) La funzione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ è:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ni' \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x' = x \\ y' = 3y + z \\ z' = 2y + 3z \end{cases} \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x, 3y+z, 2y+3z).$$

(b) Calcoliamo gli autovalori di A e i relativi autovettori.

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) \cdot [(3-\lambda)^2 - 2] = 0.$$

Le soluzioni sono:

$\lambda_1 = 1;$

$(3-\lambda)^2 = 2 \Rightarrow 3 - \lambda = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}.$

Quindi, la matrice A ha tre autovalori reali di molteplicità algebrica uguale a uno

.

Calcoliamo i relativi autovettori.

$(1) Per\ \lambda_1 = 1,$ si ha:

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ 3y + z = y \\ 2y + 3z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (x, 0, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$(2) Per\ \lambda_2 = 3 - \sqrt{2},$ si ha:

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = (3 - \sqrt{2})x \\ 3y + z = (3 - \sqrt{2})y \\ 2y + 3z = (3 - \sqrt{2})z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -\sqrt{2}y \\ 2y = -\sqrt{2}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -\sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow X = (0, y, -\sqrt{2}y).$$

$(2) Per\ \lambda_3 = 3 + \sqrt{2},$ si ha:

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = (3 + \sqrt{2})x \\ 3y + z = (3 + \sqrt{2})y \\ 2y + 3z = (3 + \sqrt{2})z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{2}y \\ 2y = \sqrt{2}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow X = (0, y, \sqrt{2}y).$$

(c) Poiché la matrice A ha tre autovalori reali e distinti, essa è diagonalizzabile.

(Q4)

(a) I vettori ortogonali al piano $\pi: 3x + y - z - 1 = 0$ sono i vettori di componenti proporzionali ai parametri direttori a = 3, b = 1 e c = - 1 del piano.

Quindi: $n = (\ell, m, n) = (3h, h, -h)$.

(b) *La distanza del punto* $P(1,3,-4)$ *dal piano* $\pi: 3x + y - z - 1 = 0$ è:

$$d = \frac{|3+3+4-1|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{9}{\sqrt{11}}.$$

(Q5) Se V(R) è uno spazio vettoriale e se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è un sistema di vettori di V(R), si dice che

$$(\mathcal{B} \text{ è } una\ base\ di\ V(R)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1)\ \mathcal{B} \text{ è } un\ sistema\ di\ generatori\ V(R) \\ 2)\ \mathcal{B} \text{ è } un\ sistema\ di\ vettori\ linearmente\ indipendenti \end{pmatrix}$$

(a) Sia $f: V \longrightarrow V'$ un'applicazione lineare e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V.

Allora, $\forall v \in V, \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n \ni' v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(v) = f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n) = f(h_1 v_1) + f(h_2 v_2) + \cdots + f(h_n v_n) =$

$= h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \cdots + h_n f(v_n) \Longrightarrow \forall v' \in Im(f), \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) \in R^n \ni'$

$v' = f(v) = h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \cdots + h_n f(v_n) \Leftrightarrow Im(f) = Span(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$.

Dunque, f trasforma una base di V in un sistema di generatori di $Im(f) = f(V)$.

(b) Se l'applicazione lineare è iniettiva, essa trasforma basi di V in basi di V'.

Dim. Già sappiamo che se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è una base di V,

$$\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$$

è un sistema di generatori di Im(f).

Dimostriamo che, se f è ingettiva, $\mathcal{B}' = \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ è un sistema di vettori L.I. di Im(f) e perciò base di Im(f).

Sia

$h_1 f(v_1) + h_2 f(v_2) + \cdots + h_n f(v_n) = 0 \Leftrightarrow f(h_1 v_1) + f(h_2 v_2) + \cdots + f(h_n v_n) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n) = 0 = f(0) \Longrightarrow (essendo\ f\ ingettiva)$

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + \cdots + h_n v_n = 0 \Longrightarrow (essendo\ \mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}\ una\ base\ di\ V)$

$\Longrightarrow h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0 \Longrightarrow f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sono L.I.