ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA

LAUREA Ing. ________________________ 5 Novembre 2018

COGNOME: __________________________ NOME: ____________________________

(Q1) Risolvere il seguente sistema lineare $\begin{cases} x+y \quad\quad -t=1 \\ x+y+2z-t=2 \\ x \quad\quad\quad\quad +t=1 \end{cases}$.

(Q2) Dimostrare che l'insieme $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x-y=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e calcolare una base.

(Q3) Assegnata la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, determinare:

$a)$ *l'applicazionelineare ad essa associata rispetto alla base canonica di* $\mathbb{R}^3$;

$b)$ *gli autovalori e i relativi autovettori*;

$c)$ *dire se la matrice* A è *diagonalizzabile*.

(Q4) Nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, *determinare*:

$a)$ *l'insiemedei vettori ortogonali al piano* $\pi: 3x+y-z-1=0$;

$b)$ *la distanza del punto* $P(1,3,-4)$ *dal piano* π.

(Q5) Dopo aver dato la definizione di base di uno spazio vettoriale,

$a)$ *dimostrare che un'applicazione lineare* $f: V \longrightarrow V'$ *trasforma una base di* V *in un sistema di generatori di* $Im(f)$;

$b)$ *dire, sotto quale ipotesi aggiuntiva,* f *trasforma una base di* V *in una base di* V'.

(Q6) Assegnate due basi $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *e* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$ *di uno spazio vettoriale* V,

$a)$ *scrivere la matrice di passaggio dalla base* $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *alla base* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$;

$b)$ *scrivere le equazioni di passaggio dalla base* $\mathcal{B}=\{(e_i)_{1,..,n}\}$ *alla base* $\mathcal{B}'=\{(e'_i)_{1,..,n}\}$.

Soluzione

(Q1) E' dato il sistema $\begin{cases} x+y \quad\quad -t=1 \\ x+y+2z-t=2 \\ x \quad\quad\quad\quad +t=1 \end{cases}.$

Le matrici associate sono:

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 5}.$$

Calcoliamo il rango di A:

$a_{1,1}=1\neq 0; \quad (rang(A)\geq 1)$

$a_{12,12}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;\ a_{12,13}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0; \quad (rang(A)\geq 2)$

$a_{123,123}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+2+0-(0+0+0)=2\neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(A')=3:$

Il sistema è compatibile e ammette $\infty^{4-3}=$

∞^1 *soluzioni, che si ottengono dalle tre*

equazioni considerando come incognite principali x, y e z.

$$\begin{cases} x+y=t+1 \\ x+y+2z=t+2 \\ x=-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t+1+y=t+1 \\ -t+1+y+2z=t+2 \\ x=-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2t \\ -t+1+2t+2z=t+2 \\ x=-t+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2t \\ 2z=1 \\ x=-t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t+1 \\ y=2t \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

(Q2) Sia $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x-y=0\}$.

1)$\forall u,u'\in U: u=(y,y,z), u'=(y',y',z') \Rightarrow u+u'=(y,y,z)+(y',y',z')=$

$=(y+y',y+y',z+z') \Rightarrow u+u'=(x'',y'',z'')=(y+y',y+y',z+z') \ni'$

$x''-y''=(y+y')-(y+y')=0 \Rightarrow)\forall u,u'\in U: u+u'\in U.$

2)$\forall k\in K \ e\ \forall u\in U: k\cdot u=k\cdot(x,y,z)=(kx,ky,kz) \ni' kx-ky=k(x-y)=0 \Rightarrow ku\in U.$

Dunque, U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Calcoliamo una base di U.

$\forall u \in U: u = (x, y, z) \ni' x - y = 0 \Longrightarrow \forall u \in U: u = (y, y, z) = (y, y, 0) + (0,0,z) =$

$= y(1,1,0) + z(0,0,1) \Longrightarrow U = Span\big(u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,0,1)\big).$

Poiché la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ha rango uguale a* 2, *i due vettori sono L.I.*

Pertanto, una base di U è

$$\mathcal{B}_U = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (0,0,1)\}$$

e la dimensione di U è 2.

(Q3) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) La funzione lineare f avente A come associata è

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ni' \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x, 3y + z, -2y + 3z).$$

b) Calcoliamo gli autovalori e i relativi autovettori di A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 + 2] = 0.$$

Tale equazione ha un solo autovalore reale, $\lambda = 1$, e due autovalori complessi.

Calcoliamo gli autovettori associati a $\lambda = 1$:

$$AX = \lambda X \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ 3y + z \\ -2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = x \\ 3y + z = y \\ -2y + 3z = z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z = -2y \\ -2y - 6y = -2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow X = (x, 0, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Poiché la matrice A ha autovalori complessi, la matrice A non è diagonalizzabile.

(Q4) Omissis

(Q5) Omissis

(Q6)

a) Se $\mathcal{B} = \{(e_i)_{1,..,n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{(e'_i)_{1,..,n}\}$ *sono due basi dello spazio vettoriale* V, dette

- $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ *le componenti di* e'_1 *rispetto alla base* $\mathcal{B}$,
- $(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ *le componenti di* e'_2 *rispetto alla base* $\mathcal{B}$,
- …
- $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ *le componenti di* e'_n *rispetto alla base* $\mathcal{B}$,

la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B} = \{(e_i)_{1,..,n}\}$ *alla base* $\mathcal{B}'$ è

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}' = \{(e'_i)_{1,..,n}\}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(e_i)_{1,..,n}\}$.

b) Se X è il vettore colonna formato dalle componenti di un vettore $v \in V$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(e_i)_{1,..,n}\}$ e se X′ è il vettore colonna formato dalle componenti di v rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{(e''_i)_{1,..,n}\}$, le equazioni per il passaggio da $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$ *sono*:

$$X = A \cdot X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ .. \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione è sulla dispensa 3.