Esame di Geometria e Algebra

Laurea Ing. ______________ — 18 Aprile 2018 — Traccia I

COGNOME ______________ NOME ______________

1 Si discuta e se possibile si risolva al variare del parametro reale h il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y + hz = h \\ x + (1-h)y + 2z = 1 \\ x + hy + 3z = 2 \end{cases}$$

2 In $\mathbf{R}^3$, sia S il sottospazio vettoriale generato da

$$B = ((1,-1,0),(1,-1,-2),(0,0,2)).$$

Si determinino le dimensioni di $S+K$ e $S \cap K$ essendo K il sottospazio

$$K = \{(x,y,z) | x + 2y = 0\}.$$

3 Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ una matrice ad elementi reali.

(a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di S.

(b) Si stabilisca se S è diagonalizzabile e in caso affermativo si scriva una matrice diagonalizzante per S.

4 Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, fissato un riferimento cartesiano, si considerino il punto $A(2,0,-1)$ e il vettore $\mathbf{v} = (1,1,3)$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela a $\mathbf{v}$.

(b) Si stabilisca la posizione reciproca tra r e la retta $s : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

(c) Se r e s sono sghembe se ne determini la minima distanza diversamente si determini l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

5 Si scriva la definizione di matrice invertibile e si dimostri che se una matrice è invertibile allora il suo determinante è diverso da zero.

6 Si scrivano la definizione di angolo tra due piani e la definizione di piani perpendicolari nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$. Si ricavi una condizione analitica di perpendicolarità tra due piani di $\mathbf{E}^3$.

Soluzione Traccia 1

(Q1) E' dato il sistema $\begin{cases} y+hz=h \\ x+(1-h)y+2z=1 \\ x+hy+3z=2 \end{cases}$

Le matrici associate al sistema sono:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 1 & 1-h & 2 \\ 1 & h & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \text{e} \quad A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & h & h \\ 1 & 1-h & 2 & 1 \\ 1 & h & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Considerata la matrice A, si ha:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & h \\ 1 & 1-h & 2 \\ 1 & h & 3 \end{vmatrix}=0+2+h^2-(h(1-h)+0+3)=2+h^2-h+h^2-3=2h^2-h-1.$$

Pongo:

$|A|=0 \Longrightarrow 2h^2-h-1=0;$

$\Delta=1+8=9;\ h_{1-2}=\dfrac{1\pm 3}{4}=\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

Discussione

1) $\forall h\neq -\frac{1}{2};1\ si\ ha: rang(A)=rang(A')=3 \Longrightarrow il\ sistema$ è $compatibile\ e\ ammette\ \infty^{3-3}=1\ soluzione$:

il sistema è determinato.

Calcoliamo l'unica soluzione:

- $\Delta=|A|=2h^2-h-1;$
- $\Delta_x=\begin{vmatrix} h & 1 & h \\ 1 & 1-h & 2 \\ 2 & h & 3 \end{vmatrix}=3h(1-h)+4+h^2-(2h(1-h)+2h^2+3)==3h-3h^2+$

  $4+h^2-2h+2h^2-2h^2-3=-2h^2+h+1=-(2h^2-h-1);$
- $\Delta_y=\begin{vmatrix} 0 & h & h \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0+2h+2h-(h+0+3h)=0;$
- $\Delta_z=\begin{vmatrix} 0 & 1 & h \\ 1 & 1-h & 1 \\ 1 & h & 2 \end{vmatrix}=0+1+h^2-(h(1-h)+0+2)=1+h^2-h+h^2-2=$

  $=2h^2-h-1.$

$\forall h\neq -\frac{1}{2};1$ la soluzione è: $\begin{cases} x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-(2h^2-h-1)}{2h^2-h-1}=-1 \\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=0 \\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{2h^2-h-1}{2h^2-h-1}=1 \end{cases}$

2) $Per\ h = -\frac{1}{2}, il\ sistema\ diventa$: $\begin{cases} y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ x + \frac{3}{2}y + 2z = 1 \\ x - \frac{1}{2}y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 2x - y + 6z = 4 \end{cases}$

Le matrici associate sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$\det(A) = 0 \Longrightarrow rang(A) < 3.$

Studiamo il rango di A':

$a'_{123,123} = a_{123,123} = \det(A) = 0;$

$a'_{123,124} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 8 + 2 - (-6 + 0 + 16) = 10 - 10 = 0.$

Quindi, rang(A') < 3 e poiché

$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow rang(A) = rang(A') = 2 \Longrightarrow il\ sistema$ è $compatibile\ e$ $ammette\ \infty^{3-2} = \infty^1\ soluzioni: il\ sistema$ è $indeterminato.$

Calcoliamo le infinite soluzioni considerando le prime due equazioni nelle incognite principali x e y:

$$\begin{cases} 2y = z - 1 \\ 2x + 3y = -4z + 2 \end{cases}$$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4;$
- $\Delta_x = \begin{vmatrix} z - 1 & 2 \\ -4z + 2 & 3 \end{vmatrix} = 3z - 3 - 2(-4z + 2) = 3z - 3 + 8z - 4 = 11z - 7;$
- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & z - 1 \\ 2 & -4z + 2 \end{vmatrix} = -2z + 2 = -2(z - 1);$

Quindi, le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{11z - 7}{4} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2(z - 1)}{-4} = \frac{z - 1}{2} \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}.$$

2) $Per\ h = 1, il\ sistema\ diventa$: $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}.$

Le matrici associate sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$\det(A) = 0 \Longrightarrow rang(A) < 3.$

Studiamo il rango di A':

$a'_{123,123} = a_{123,123} = \det(A) = 0;$

$a'_{123,124} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 1 - (0 + 0 + 2) = 2 - 2 = 0.$

Quindi, rang(A') < 3 e poiché

$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = rang(A') = 2 \Rightarrow il\ sistema$ è $compatibile\ e$

$ammette\ \infty^{3-2} = \infty^1\ soluzioni: il\ sistema$ è $indeterminato.$

Calcoliamo le infinite soluzioni scegliendo x,y come incognite principali e considerando le prime due equazioni:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z + 1 \\ x = -2z + 1 \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}.$$

(Q2)

a) Calcoliamo una base e la dimensione del sottospazio

$$S = \mathcal{L}\big(u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), u_3 = (0,0,2)\big).$$

Considero la matrice avente per colonne le componenti dei tre vettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A:

- $a_{1,1} = 1 \neq 0: rang(A) \geq 1;$
- $a_{12,12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ a_{12,13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ a_{13,12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow rang(A) \geq 2;$
- $a_{123,123} = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$

Quindi:

$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \big(u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), u_3 = (0,0,2)\big)$ sono L.D.

I vettori L.I. sono $u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2).$

Una base di S è: $\mathcal{B}_S = \{u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2)\}$ e dim(S) = 2.

b) Ora calcoliamo una base e la dimensione del sottospazio $\mathrm{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 0\}.$

$\forall v \in \mathrm{K}: v = (x,y,z) = (-2y,y,z) = (-2y,y,0) + (0,0,z) = y(-2,1,0) + z(0,0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \mathcal{L}\big(v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\big).$

Detta $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, poiché $a'_{13,12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 2$:

i due vettori $\left(v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\right)$ sono L.I.

Pertanto, una base del sottospazio K è

$$\mathcal{B}_K = \{v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\}$$

e

dim(K) = 2.

Tutto ciò premesso, possiamo calcolare la dimensione di S + K e di $S \cap K$.

Poiché

$$\mathcal{B}_S = \{u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2)\}$$

è una base di S e poiché

$$\mathcal{B}_K = \{v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\}$$

è una base di K,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_K = \{u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\}$$

è un sistema di generatori di S + K.

Detta $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$, poiché:

$a''_{1,1} = 1;\ \ (rang(A'') \geq 1)$

$a''_{12,12} = -1 + 1 = 0;\ a''_{12,13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0;\ \ (rang(A'') \geq 2)$

$a''_{123,123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 - (0 - 2 + 0) = -2 \neq 0.$

$Quindi, rang(A'') = 3 \Leftrightarrow (u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1))$ sono L.D.

I vettori L.I. sono $(u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), v_1 = (-2,1,0))$.

Una base di S + K è:

$$\mathcal{B}_{S+K} = \{u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,-1,-2), v_1 = (-2,1,0)\}$$

e

dim(S + K) = 3.

Applicando il teorema delle dimensioni, si ha:

$\dim(S + K) = \dim(S) + \dim(K) - \dim(S \cap K) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(S \cap K) = \dim(S) + \dim(K) - \dim(S + K) = 2 + 2 - 3 = 1 \Rightarrow \dim(S \cap K) = 1.$

Un metodo alternativo per calcolare la dimensione del sottospazio intersezione, $S \cap K$, ma più lungo, è il seguente.

Si calcolano dapprima le equazioni di S.

$$\forall u \in S: u = hu_1 + ku_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = h(1,-1,0) + k(1,-1,-2) = (h+k, -h-k, -2k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = h+k \\ y = -h-k \\ z = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h+k \\ y = -h-k = -(h+k) = -x \Rightarrow y = -x. \\ z = -2k \end{cases}$$

Quindi:

$$S = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = -x\}.$$

Poi si calcola $S \cap K, ponendo\ a\ sistema\ le\ equazioni\ di\ S\ e\ di\ K$:

$$\begin{cases} y + x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \forall w \in S \cap K: w = (0,0,z) = z(0,0,1) \Rightarrow S \cap K = \mathcal{L}(0,0,1).$$

Dunque:

$$\mathcal{B}_{S \cap K} = \{w = (0,0,1)\} \text{ e } \dim(S \cap K) = 1.$$

(Q3) Sia $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcoliamo gli autovalori di S.

$$P(\lambda) = |S - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 + 0 + 0 - (0+0+0) = 0 \Rightarrow \lambda = -1\ (semplice)\ e\ \lambda = 1\ (doppia).$$

Quindi, gli autovalori di S sono:

- $\lambda = -1, di\ molteplicit\grave{a}\ algebrica\ m_a(\lambda = -1) = 1;$
- $\lambda = 1, di\ molteplicit\grave{a}\ algebrica\ m_a(\lambda = 1) = 2.$

Ora calcoliamo gli autospazi di S.

- Per $\lambda = -1$, si ha:

$$SX = \lambda X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y-z \\ y \\ 2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z = -x \\ y = -y \\ 2y - z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -1$ è

$$V_{\lambda=-1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right), una\ base\ \grave{e}\ \mathcal{B}_{V_{\lambda=-1}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, dimV_{\lambda=-1} = 1, m_g(\lambda = -1) = 1.$$

- Per $\lambda = 1$, si ha:

$$SX = \lambda X \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x+y-z \\ y \\ 2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y-z = x \\ y = y \\ 2y - z = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow y = z \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ è

$$V_{\lambda=1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), una\ base\ \text{è}\ \mathcal{B}_{V_{\lambda=1}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, dimV_{\lambda=1} = 2, m_g(\lambda = 1) = 2.$$

b) Poiché la matrice S ha due autovalori distinti che hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica, essa è diagonalizzabile.

La matrice che diagonalizza S è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

la matrice diagonale, simile ad S, è:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Q5) $Se\ A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice che

$$(A\ \text{è}\ invertibile) \Leftrightarrow (\exists A' \in M_n(\mathbb{R}) \ni'\ AA' = A'A = I_n).$$

Dimostriamo che:

(C.N.) $(A\ \text{è}\ invertibile) \Longrightarrow (\det(A) \neq 0)$.

Poiché $(A\ \text{è}\ invertibile) \Leftrightarrow (\exists A' \in M_n(\mathbb{R}) \ni'\ AA' = A'A = I_n) \Longrightarrow |AA'| = |A'A| = |I_n| \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |A| \cdot |A'| = |A'| \cdot |A| = 1 \Longrightarrow |A| \neq 0\ (e\ |A'| \neq 0)$.