Esame di Geometria e Algebra

Laurea Ing. ______________________ — 14 Febbraio 2018 — Traccia II

COGNOME ______________________ NOME ______________________________

1 Sia S il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$, generato da

$$B = ((0, h, 1, 0), (0, -1, 0, h), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 2, 0)).$$

Si determini la dimensione di S al variare del parametro reale h. Posto $h = 0$ si indichi con A la matrice reale 4×4 che ha come righe le componenti dei vettori di B rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$. Si stabilisca se A è diagonalizzabile.

2 Si discuta e se possibile si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro reale h

$$\begin{cases} 2x + y + z + 2t = h \\ hx + y + z + ht = 2 \end{cases}$$

3 Sia $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^2$ l'applicazione così definita $f(x, y, z) = (x - hy, x - z + h - 2)$.

(a) Si determini il valore del parametro reale h per cui f è un'applicazione lineare.

(b) Per quel valore di h per cui f é lineare si determinino $Ker f$ e $Im f$.

4 Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, fissato un riferimento cartesiano, si considerino le due rette $r : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Si stabilisca la posizione reciproca delle due rette. Se incidenti si determini l'equazione cartesiana del piano che le contiene diversamente se ne calcoli la distanza.

5 Si scriva la definizione di determinante di una matrice quadrata e se ne enuncino alcune proprietà. Si dimostri inoltre che se $A \in \mathbf{K}^{n,n}$ è invertibile allora il suo determinante è diverso da zero.

6 Si scrivano le definizioni di angolo tra due vettori liberi dello spazio ordinario, di prodotto scalare, di prodotto vettoriale di due vettori liberi dello spazio ordinario e se ne enuncino alcune proprietà.

Soluzione

(Q1)

(a) Sia $S = \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}\big((0,h,1,0),(0,-1,0,h),(0,1,1,0),(0,0,2,0)\big)$ $e\ sia$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

la matrice avente per righe le componenti dei vettori di B.

Poiché la matrice A ha la prima colonna formata da zeri, il rango di A è uguale al rango della matrice

$$A' = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} .$$

Considero il minore estratto del 3° ordine

$$a_{123,123} = \begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + h + 0 - (0 + h^2 + 0) = h - h^2$$

e studio

$$a_{123,123} = 0 \Leftrightarrow h(1-h) = 0 \Longrightarrow h = 0 \ \vee h = 1.$$

$$Discussione$$

1) $\forall h \neq 0; 1: rang(A) = rang(A') = 3 \Longrightarrow i\ vettori\ L.I.di\ S\ sono\ tre \Longrightarrow \dim(S) = 3.$

2) Per h = 0, la matrice A' diventa:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Calcoliamo il rango di A':

$$a_{12,12} = 0 + 1 = 1 \neq 0; rang(A') \geq 2;$$

$$a_{123,123} = 0; a_{124,123} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0.$$

$Quindi, rang(A) = rang(A') = 2 \Longrightarrow i\ vettori\ L.I.di\ S\ sono\ due \Longrightarrow \dim(S) = 2.$

3) $Per\ h = 1, la\ matrice\ A' diventa$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Calcoliamo il rango di A':

$a_{12,12} = 0 + 1 = 1 \neq 0; rang(A') \geq 2;$

$a_{123,123} = 0; a_{124,123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (0 + 2 + 0) = -2.$

$Quindi, rang(A) = rang(A') = 3 \Longrightarrow i\ vettori\ L.I.\ di\ S\ sono\ tre \Longrightarrow \dim(S) = 3.$

Conclusione

Lo spazio vettoriale S ha:

- dimensione uguale a tre, $\forall h \neq 0$;
- dimensione uguale a due, per h = 0.

(b) Considero la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

ottenuta per h = 0.

Calcoliamo gli autovalori di A. Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda[(-1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - (0 + 0 + 0)] = -\lambda^2(1+\lambda)(1-\lambda).$$

Risolvo:

$$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0\ (doppia), \lambda = \pm 1\ (semplici)$$

Dunque, la matrice A ha tre autovalori distinti:

- $\lambda_1 = 0, di\ molteplicità\ algebrica\ m_a = 2;$
- $\lambda_2 = 1, di\ molteplicità\ algebrica\ m_a = 1;$
- $\lambda_3 = -1, di\ molteplicità\ algebrica\ m_a = 1.$

Ora calcoliamo gli autospazi di A, associati a ciascun autovalore.

$$1)\ Per\ \lambda_1 = 0, si\ ha: AX = \lambda_1 X \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow X = (x_1, 0,0, x_4) = (x_1, 0,0,0) + (0,0,0, x_4) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = x_1(1,0,0,0) + x_4(0,0,0,1) \Longrightarrow V_{\lambda_1=0} = \mathcal{L}\big((1,0,0,0), (0,0,0,1)\big) \Longrightarrow dimV_{\lambda_1=0} = 2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m_g(\lambda_1 = 0) = 2.$$

2) $Per\ \lambda_2 = 1, si\ ha: AX = \lambda_2 X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ -x_2 = x_2 \\ x_2 + x_3 = x_3 \\ 2x_3 = x_4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \\ 2x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow X = (x_3, 0, x_3, 2x_3) = x_3(1,0,1,2) \Rightarrow V_{\lambda_2=1} = \mathcal{L}\big((1,0,1,2)\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow m_g(\lambda_2 = 1) = 1.$

3) $Per\ \lambda_3 = -1, si\ ha: AX = \lambda_3 X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \\ x_2 + x_3 = -x_3 \\ 2x_3 = -x_4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_2 = -2x_3 \\ 2x_3 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_4 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow X = (-x_3, -2x_3, x_3, -2x_3) = x_3(-1,-2,1,-2) \Rightarrow V_{\lambda_3=-1} = \mathcal{L}\big((-1,-2,1,-2)\big)$

$\Rightarrow m_g(\lambda_3 = -1) = 1.$

Quindi, poiché A tre autovalori reali con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica, la matrice A è diagonalizzabile.

Una matrice che diagonalizza A è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale simile ad A è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Q2) E' dato il sistema $\begin{cases} 2x + y + z + 2t = h \\ hx + y + z + ht = 2 \end{cases}$

Le matrici associate al sistema sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ h & 1 & 1 & h \end{pmatrix}_{2\times4} \ \ e \ \ A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & h \\ h & 1 & 1 & h & 2 \end{pmatrix}_{2\times5}.$$

Calcolo il rango di A:

$a_{12,12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ h & 1 \end{vmatrix} = 2 - h;$

studio:

$a_{12,12} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ h & 1 \end{vmatrix} = 2 - h = 0 \Rightarrow h = 2.$

$$Discussione$$

1) $\forall h \neq 2: rang(A) = rang(A') = 2 \Longrightarrow il\ sistema$ è $compatibile\ e\ ammette\ \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

$Calcoliamo\ le\ infinite\ soluzioni\ considerando\ le\ due\ equazioni\ nelle\ incognite\ principali\ x, y$:

$$\begin{cases} 2x + y = -z - 2t + h \\ hx + y = -z - ht + 2 \end{cases}$$

$\Delta = a_{12,12} = 2 - h;$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -z - 2t + h & 1 \\ -z - ht + 2 & 1 \end{vmatrix} = -z - 2t + h + z + ht - 2 = (h-2)t + (h-2) = (h-2)(t+1);$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -z - 2t + h \\ h & -z - ht + 2 \end{vmatrix} = -2z - 2ht + 4 + hz + 2ht - h^2 = (h-2)z + 4 - h^2 = (h-2)(z-h-2).$

Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(h-2)(t+1)}{2-h} = -t - 1 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(h-2)(z-h-2)}{2-h} = -z + h + 2 \end{cases}$, $\forall h\ e\ \forall z, t \in \mathbb{R}.$

2) $Per\ h = 2, il\ sistema\ diventa\ \begin{cases} 2x + y + z + 2t = 2 \\ 2x + y + z + 2t = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow 2x + y + z + 2t = 2.$

Considerando y come incognita principale, si ha:

$$y = -2x - z - 2t + 2, \forall x, z, t \in \mathbb{R}.$$

$Dunque, per\ h = 2\ il\ sistema\ ammette\ \infty^3 soluzioni.$

(Q5) Se A è una matrice quadrata di ordine n,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dicesi determinante di A il numero reale

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A'_{ij}$$

Per le proprietà, vedere sulla dispensa 2 (*matrici e determinanti).*

Se A è una matrice invertibile, per definizione

$\exists A' \in M_n \ni' AA' = A'A = I \Longrightarrow \det(AA') = \det(A'A) = 1 \Longleftrightarrow \det(A) \cdot \det(A') = \det(A') \cdot \det(A) = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \det(A) \neq 0.$