Legame costitutivo per un materiale, linearmente iperleastico

Luigi La Ragione
Politecnico di Bari

March 30, 2015

1 Materiale iperelastico, trasversalmente isotropo

La relazione costitutiva si scrive come

$$\sigma_{ij} = A_{ijkm}\varepsilon_{km} \tag{1}$$

dove $\mathbf{A}$ è il tensore di elasticità, tensore del quarto ordine che gode delle simmetrie maggiori e minori. La formula di rappresentazione per il tensore $\mathbf{A}$ di un materiale trasversalmente isotropo è:

$$\begin{aligned} A_{ijkm} &= \alpha_1 h_i h_j h_k h_m + \alpha_2 \delta_{ij}\delta_{km} + \alpha_3 \left(\delta_{ij} h_k h_m + h_j h_i \delta_{km}\right) \\ &\quad + \alpha_4 \left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right) + \alpha_5 \left(\delta_{ik} h_j h_m + \delta_{jm} h_i h_k + \delta_{im} h_k h_j + \delta_{kj} h_m h_i\right) \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\mathbf{h}$ è il versore associato alla direzione privilegiata caratterizzante l'anisotropia e gli α sono le 5 costanti indipendenti che hanno dimensione di una tensione. Si può facilmente verificare che l'equazione (2) rispetta le prima citate simmetrie maggiore e minore. Ovviamente è possibile introdurre il tensore $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ in modo da scrivere le deformazioni in funzione delle tensioni

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkm}\sigma_{km} \tag{3}$$

dove

$$\begin{aligned} C_{ijkm} &= \beta_1 h_i h_j h_k h_m + \beta_2 \delta_{ij}\delta_{km} + \beta_3 \left(\delta_{ij} h_k h_m + h_j h_i \delta_{km}\right) \\ &\quad + \beta_4 \left(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}\right) + \beta_5 \left(\delta_{ik} h_j h_m + \delta_{jm} h_i h_k + \delta_{im} h_k h_j + \delta_{kj} h_m h_i\right) \end{aligned} \tag{4}$$

e le β sono le 5 costanti indipendenti aventi dimensioni dell'inverso di una tensione. In particolare, per un materiale trasversalmente isotropo possiamo riformulare l'equazione

(3) in forma matriciale. Fissiamo un sistema di riferimento y_1, y_2, y_3 in cui la direzione $y_3 \equiv h$ e sia $y_1 - y_2$ il piano di isotropia. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\hat{G}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\hat{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \tag{5}$$

in cui vale la seguente relazione

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \tag{6}$$

dove E e G sono i moduli, rispettivamente, longitudinale e di taglio nel piano di isotropia $y_1 - y_2$, E_3 è il modulo longitudinale lungo l'asse di anisotropia e $\hat{G} = G_{13} = G_{23}$ è l'altro modulo di taglio. Mettendo in relazione l'equazione (3) con la (5) si ottiene

$$C_{1212} = \frac{1}{4G}; C_{1313} = C_{2323} = \frac{1}{4\hat{G}}, C_{3333} = \frac{1}{E_3} \tag{7}$$

e

$$C_{1111} = C_{2222} = \frac{1}{E}; C_{1122} = C_{2211} = -\frac{\nu}{E}; C_{1133} = C_{3311} = C_{3322} = C_{2233} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \tag{8}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \beta_2 + 2\beta_4 &= \frac{1}{E}, \\ \beta_2 &= -\frac{\nu}{E}, \\ \beta_2 + \beta_3 &= -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\ \beta_5 &= \frac{1}{4\hat{G}}, \\ \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 + 4\beta_5 &= \frac{1}{E_3}. \end{aligned} \tag{9}$$

E' possibile determinare l'energia specifica di deformazione per un materiale trasversalmente isotropo. Dalla definizione

$$\varphi = \frac{1}{2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \tag{10}$$

e dall'equazione (4) , si ottiene

$$\varphi = \frac{\beta_1}{2}\tilde{\sigma} + \frac{\sigma_{qq}^2}{2}\beta_2 + \beta_3\sigma_{qq}\tilde{\sigma} + \beta_4\sigma_{km}\sigma_{km} + 2\beta_5\sigma_{ij}\sigma_{im}h_j h_m$$

posto $\tilde{\sigma} = \sigma_{km}h_k h_m$.

Bibliografia

Scienza delle Costruzioni, L. Nunziante, L. Gambarotta e A.Tralli, edito Mc Graw-Hill (2011)