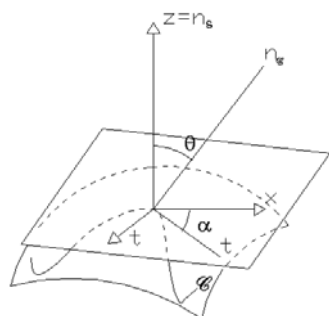


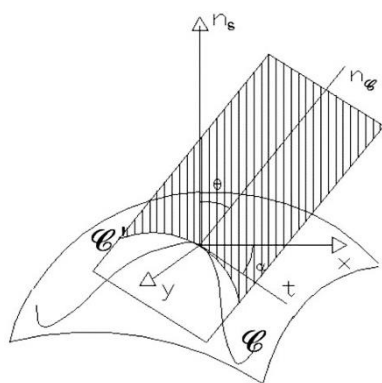
Appendice 2 - Curve e superfici

2.1. Geometria delle curve

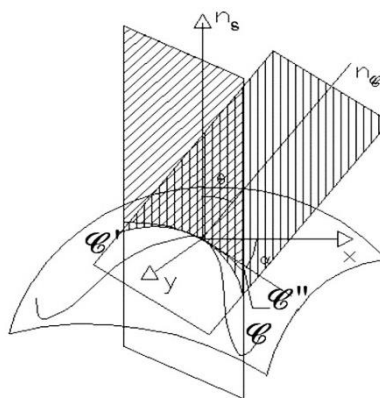


Si consideri un punto della curva \mathcal{C} (curva gobba appartenente alla superficie) ed un suo spostamento infinitesimo (tale da considerarlo tangente); si consideri, inoltre, la normale alla curva ed alla superficie, nonché la tangente alla curva ed il piano tangente nel medesimo punto.

Per definire le relazioni esistenti tra curva e superfici ci servono delle sezioni piane le quali contengono sia la normale che la tangente alla curva nel punto (fig. A2.1).



\mathcal{C} sezione piana



\mathcal{C} sezione normale

Figura A2.1 – Sezione piana e sezione normale

Avendo indicato con:

t = tangente alla curva gobba,

n_c = normale alla curva gobba,

R' = raggio di curvatura della curva gobba,

si definisce *piano oscuro* quel piano cui appartiene l'arco di curva che meglio approssima la curva nel punto.

Se si indica con R il raggio della sezione piana, si può dimostrare che $R = R' =$ raggio del cerchio oscuro della curva gobba.

Tutti i piani che contengono t tagliano la superficie secondo sezioni piane la cui normale principale n forma un angolo θ (qualunque) con la normale alla superficie n_s .

Al variare di α si ottengono infiniti piani e, pertanto, infinite sezioni piane; si dimostra che il raggio di curvatura R_α al variare delle infinite sezioni varia da un minimo (R_1) ad un massimo (R_2) che rappresentano le due sezioni principali perpendicolari tra loro.

In particolare si ha:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \quad \text{Teorema di Eulero} \quad (\text{A2.1})$$

Il valore medio degli infiniti raggi di curvatura R_α che variano con continuità da R_1 a R_2 , come con continuità varia α , è dato da: $R_m = \sqrt{R_1 R_2}$ (A2.2)

Per l'ellissoide $R_1 = \rho$ è il raggio del meridiano e $R_2 = N$ è la gran normale, pertanto:

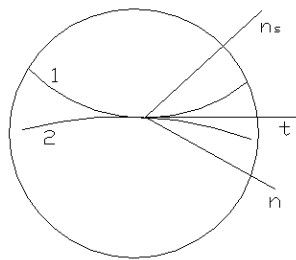
$$R_m = \sqrt{\rho N} \quad (\text{A2.3})$$

La sezione piana per cui risulta $\theta = 0$ ossia contenente t e n_s si chiama *sezione normale*, secondo l'angolo α , essendo α l'angolo formato da t con la direzione di riferimento (per esempio il meridiano per l'ellissoide). Si dimostra che il raggio di curvatura di una sezione piana qualunque è dato da:

$$R = R_\alpha \cos \theta \quad \text{Teorema di Meusnier} \quad (\text{A2.4})$$

È, quindi, possibile considerare solo sezioni normali visto che è sempre possibile risalire ad una sezione piana qualunque con il suddetto teorema.

Esempi



Si analizza il caso particolare in cui la curva sia:

- il parallelo di raggio r e normale principale n , formante un angolo φ (latitudine) con la normale alla superficie;
- il primo verticale di raggio N (gran normale) e normale principale n coincidente con la normale alla superficie.

Il primo verticale è, dunque, la sezione normale che ha la stessa tangente del parallelo.

Per il Teorema di Meusnier: $r = N \cos \varphi$

2.2. Rappresentazione delle superfici

2.2.1. Riferimento cartesiano

Una generica superficie è rappresentata nello spazio cartesiano attraverso una funzione del tipo:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (\text{A2.5})$$

ovvero, rispetto ad una coordinata, dall'espressione $z = f(x, y)$.

Se la superficie è di rotazione con asse di rotazione z la sua equazione cartesiana sarà del tipo:

$$x^2 + y^2 - f(z) = 0,$$

e, in particolare:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R \text{ sfera di raggio } R$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellissoide di semiassi rispettivamente maggiori e minori } a \text{ e } b$$

Per una qualsiasi superficie $f(x, y, z) = 0$ il piano tangente in $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ha equazione:

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (\text{A2.6})$$

La retta normale al piano tangente in P_0 (normale anche alla superficie) ha equazione:

$$\frac{(x - x_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{(z - z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (\text{A2.7})$$

I coseni direttori (angoli che la normale forma con gli assi cartesiani) di detta normale sono:

$$\begin{cases} \cos \lambda = \frac{\partial F}{\partial x} / M \\ \cos \mu = \frac{\partial F}{\partial y} / M \\ \cos \gamma = \frac{\partial F}{\partial z} / M \end{cases} \quad \text{con} \quad M = \pm \sqrt{(\partial F / \partial x)^2 + (\partial F / \partial y)^2 + (\partial F / \partial z)^2} \quad (\text{A2.8})$$

L'equazione di una superficie è possibile scriverla in forma esplicita:

$$\begin{cases} \cos \lambda = \frac{\partial z}{\partial x} / M_1 \\ \cos \mu = \frac{\partial z}{\partial y} / M_1 \\ \cos \gamma = 1 / M_1 \end{cases} \quad \text{con} \quad M_1 = \pm \sqrt{(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2 + 1} \quad (\text{A2.9})$$

Una curva può essere rappresentata dall'intersezione di un piano con un'altra superficie, ad esempio, attraverso i seguenti sistemi:

- *Curva appartenente ad un piano perpendicolare all'asse z*

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = c \end{cases}$$

- *Cerchio di raggio R*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = c \end{cases}$$

- *Ellisse di semiassi a e b*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$$

L'equazione di una retta può essere rappresentata dall'intersezione di due piani, oppure come *equazione frazionaria* dalle condizioni di allineamento di tre punti:

$$P(x, y, z), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{oppure} \quad \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

I coseni direttori di una retta r sono:

$$\begin{cases} \cos xr = \frac{l}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \\ \cos yr = \frac{m}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \\ \cos zr = \frac{n}{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \end{cases}$$

2.2.2. Coordinate curvilinee

Le coordinate cartesiane non descrivono efficacemente figure tracciate su superfici, pertanto, si introducono due parametri indipendenti u e v ; si impone che le coordinate cartesiane di un punto nello spazio siano loro funzione:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{equazione parametrica di una superficie} \quad (\text{A2.10})$$

dove x, y, z sono funzioni continue che ammettono un solo valore nel loro campo di definizione, dei due parametri u e v .

Per valore di u costante, al variare di v si ottengono le equazioni parametriche di una curva appartenente alla superficie, per ogni valore costante di v si ottengono ∞^1 curve appartenenti alla superficie che si indicano con il sistema $u = cost$.

In modo analogo resta definito un secondo sistema di ∞^1 curve delle superfici che costituisce il sistema $v = cost$.

Ad ogni punto della superficie è associata una sola coppia di valori u, v di coordinate curvilinee (corrispondenza biunivoca). Ogni punto della superficie sarà ovviamente individuato dall'intersezione di una curva del sistema $u = cost$ con una di quello $v = cost$ (fig. A2.2).

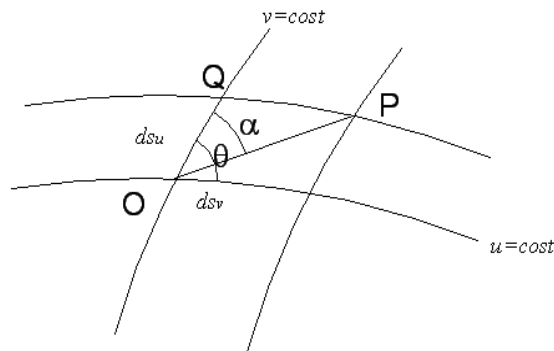


Figura A2.2 – Coordinate curvilinee

Si considerano sulla superficie due punti infinitamente vicini $O = (x, y, z)$ e $P = (x + dx, y + dy, z + dz)$, il quadrato dell'elemento d'arco OP è espresso dalla relazione:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A2.11})$$

differenziando la suddetta espressione:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

quadrando e sostituendo nella (A2.11) si ottiene:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (\text{A2.13})$$

dove:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$
(A2.14)

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Nella (A2.11) per $du=0$ si hanno le ds_u ossia la famiglia di curve che verificano $u=cost$, pertanto:

$$ds_u = \sqrt{G}dv$$
(A2.15)

analogamente per $dv=0$ il corrispondente elemento ds_v , appartiene alla famiglia di curve a $v=cost$ ed è dato da:

$$ds_v = \sqrt{E}du$$
(A2.16)

Si consideri il triangolo infinitesimo OPQ (assimilabile al triangolo piano) di equazione:

$$ds^2 = ds_v^2 + ds_u^2 - 2ds_v ds_u \cos(180^\circ - \theta)$$
(A2.17)

ovvero

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 + 2\sqrt{EG}dudv \cos \theta$$
(A2.18)

Confrontando la (A2.28) con la (A2.23) si ha:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}$$
(A2.19)

Se $F=0$ le linee coordinate si incontrano costantemente ad angolo retto (*coordinate curvilinee ortogonali*) la (A2.13) diventa:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

dal triangolo infinitesimo per detti sistemi si ottiene:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \\ \sin \alpha = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \\ \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} \end{cases}$$
(A2.20)

Si consideri il quadrilatero infinitesimo delimitato dalle linee coordinate $u, u+du, v, v+dv$; poiché può essere considerato piano la sua area sarà:

$$d\sigma = ds_u \cdot ds_v \sin \theta = \sqrt{E}du \sqrt{G}dv \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$
(A2.21)

che nel caso di sistemi ortogonali ($F=0$) diventa:

$$d\sigma = \sqrt{EG}dudv$$

Le coordinate curvilinee, inoltre, si dicono *isometriche* quando si ha $E=G$ ed $F=0$, in questo caso la (A2.13) diventa:

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) = G(du^2 + dv^2)$$

Se i parametri u e v sono ortogonali a maglie quadrate, il sistema si dice *isotermo*.

2.2.3. Curvatura delle linee su una superficie

L'equazione parametrica di una curva nello spazio può ottenersi ponendo nelle (A2.10) $u=u(s)$ e $v=v(s)$, dove s è un nuovo parametro che rappresenta la lunghezza dell'arco di curva contata da un'origine arbitraria.

Dal sistema (A2.10) si ottiene, quindi:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche della curva} \quad (\text{A2.22})$$

La tangente alla curva in un punto generico $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ha equazione:

$$\frac{x-x_0}{dx/ds} = \frac{y-y_0}{dy/ds} = \frac{z-z_0}{dz/ds} \quad (\text{A2.23})$$

con le derivate calcolate nel punto P_0 .

I coseni direttori della tangente sono dati da:

$$\begin{cases} \cos \alpha = dx/ds \\ \cos \beta = dy/ds \\ \cos \gamma = dz/ds \end{cases} \quad (\text{A2.24})$$

Quadrando e sommando le (A2.24) si ha:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A2.25})$$

L'equazione del piano normale in P_0 alla tangente, e quindi alla curva, è dato da:

$$(x-x_0)\frac{dx}{ds} + (y-y_0)\frac{dy}{ds} + (z-z_0)\frac{dz}{ds} = 0 \quad (\text{A2.26})$$

La normale principale alla curva in P_0 ha equazione:

$$\frac{(x-x_0)}{d^2x/ds^2} = \frac{(y-y_0)}{d^2y/ds^2} = \frac{(z-z_0)}{d^2z/ds^2} \quad (\text{A2.27})$$

I cui coseni direttori sono dati dalle *formule di Frenet*:

$$\begin{cases} \cos \phi = R \frac{d^2x}{ds^2} \\ \cos \chi = R \frac{d^2y}{ds^2} \\ \cos \vartheta = R \frac{d^2z}{ds^2} \end{cases} \quad (\text{A2.28})$$

Si assume P come origine di un sistema di coordinate che abbia per asse delle z la normale alla superficie e x, y giacente nel piano tangente e tra loro perpendicolare. La superficie ha equazione $z = f(x, y)$ e la generica curva gobba appartenente alla superficie ha equazioni parametriche (A2.22) i coseni direttori sono dati dalle (A2.9), pertanto, nel punto di origine P si ha:

$$\cos \lambda = 0 \quad \cos \mu = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right) = 0 \quad (\text{A2.29})$$

La normale principale nel punto d'origine alla curva formerà con l'asse z un angolo θ che per la terza delle (A2.28) sarà data da:

$$\frac{\cos \theta}{R} = \frac{d^2 z}{ds^2} \quad (\text{A2.30})$$

Considerando l'equazione della superficie e derivandola due volte si ottiene:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2}$$

Adottando i *simboli di Monge* $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t \right]$ si ha:

$$\left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)_0 = r_0 \cos^2 \alpha + 2s_0 \sin \alpha \cos \alpha + t_0 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \text{per la (A2.30)} \frac{\cos \theta}{R} = r_0 \cos^2 \alpha + 2s_0 \sin \alpha \cos \alpha + t_0 \sin^2 \alpha \quad (\text{A2.31})$$

Il secondo membro della suddetta relazione contiene i termini r_0, s_0, t_0 che dipendono dall'equazione della superficie e dal punto P , una volta scelta la superficie e scelto il punto detti termini sono

costanti, pertanto, il rapporto $\frac{\cos \theta}{R}$ dipende solo da α , ne consegue che tutte le curve aventi la

stessa tangente hanno detto rapporto invariante. Questo significa che se oltre alla curva sghemba si considera anche la curva piana, ottenuta dall'intersezione della superficie con il piano oscuro, si ha:

$$\frac{\cos \theta}{R} = \frac{\cos \theta_1}{R_1} \Rightarrow \theta = \theta_1 \quad R = R_1 \quad (\text{A2.32})$$

Ogni curva gobba sulla superficie ha in un punto lo stesso raggio di curvatura della sezione piana ottenuta segnando la superficie con il piano oscuro alla curva gobba nel punto considerato.

Per la *sezione normale* si ha:

$$\frac{1}{R_\alpha} = r_0 \cos^2 \alpha + 2s_0 \sin \alpha \cos \alpha + t_0 \sin^2 \alpha \quad (\text{A2.33})$$

essendo il secondo membro di questa relazione uguale a quello della (A2.31) lo saranno anche i primi, perciò si avrà:

$$\frac{\cos \theta}{R} = \frac{1}{R_\alpha} \Rightarrow R_\alpha \cos \theta = R \quad \text{Teorema di Meusnier}$$

Teorema di Meusnier: Il raggio di curvatura di una sezione piana la cui normale formi con la normale alla superficie un angolo θ è uguale al raggio di curvatura della sezione normale avente la stessa tangente moltiplicato per il coseno dell'angolo θ .

$$x = \sqrt{R_\alpha} \cos \alpha$$

$$y = \sqrt{R_\alpha} \sin \alpha \quad (\text{A2.34})$$

dalla (A2.33) e (A2.34) si ottiene

$$1 = r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2 \quad (\text{A2.35})$$

Le sezioni normali corrispondenti ai valori massimo e minimo della curvatura si chiamano sezioni normali principali. Se gli assi x e y sono scelti in modo da coincidere con le direzioni degli assi della

conica (ossia giacciono nei piani delle sezioni principali) il secondo termine della (A2.35) scompare, ovvero dovrà essere $s_0=0$ per cui si ha:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \bar{r}_0 \cos^2 \alpha + \bar{t}_0 \sin^2 \alpha \quad (\text{A2.36})$$

e per $\alpha=0$ e $\alpha=90$ si ottengono:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} = \bar{r}_0 \quad R_1 = \frac{1}{\bar{r}_0} \\ \Rightarrow \\ \frac{1}{R_2} = \bar{t}_0 \quad R_2 = \frac{1}{\bar{t}_0} \end{aligned} \quad (\text{A2.37})$$

Sostituendo le (A2.37) nella (A2.36) si ottiene:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \quad \text{Teorema di Eulero} \quad (\text{A2.38})$$

Il secondo membro della (A2.37) non cambia se al posto di α si pone $(\pi-\alpha)$, ne consegue che *due sezioni normali, le cui tangenti sono simmetriche rispetto ad una sezione principale, hanno la stessa curvatura.*

Determiniamo il raggio di curvatura medio R_m :

$$R_m = \int_0^{2\pi} R_\alpha d\alpha = \frac{4}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_1 R_2}{R_2 \cos^2 \alpha + R_1 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

Dividendo numeratore e denominatore per $R_2 \cos^2 \alpha$ ed integrando per sostituzione di:

$$t = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \operatorname{tg} \alpha$$

$$d\alpha = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cos^2 \alpha dt$$

si ottiene:

$$R_m = \frac{2}{\pi} \sqrt{R_1 R_2} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{R_1 R_2} [\operatorname{arctg} t]_0^\infty = \sqrt{R_1 R_2}$$