Modelli di propagazione semplificati

Ipotizziamo una forma approssimata dell'equazione del moto, nell'ipotesi di una lenta variazione, nello spazio e nel tempo, delle caratteristiche del moto.

Tale caratteristica suggerisce la possibilità di trattare il moto come una successione lenta, spazio temporale, di condizioni di moto uniforme.
In altre parole si assume che portata e area della sezione siano legate in ogni sezione ed in ogni istante dal legame proprio del moto uniforme

Tale schema equivale a due sostanziali approssimazioni:

1. si trascura l'inerzia della massa fluida (**modello parabolico**)

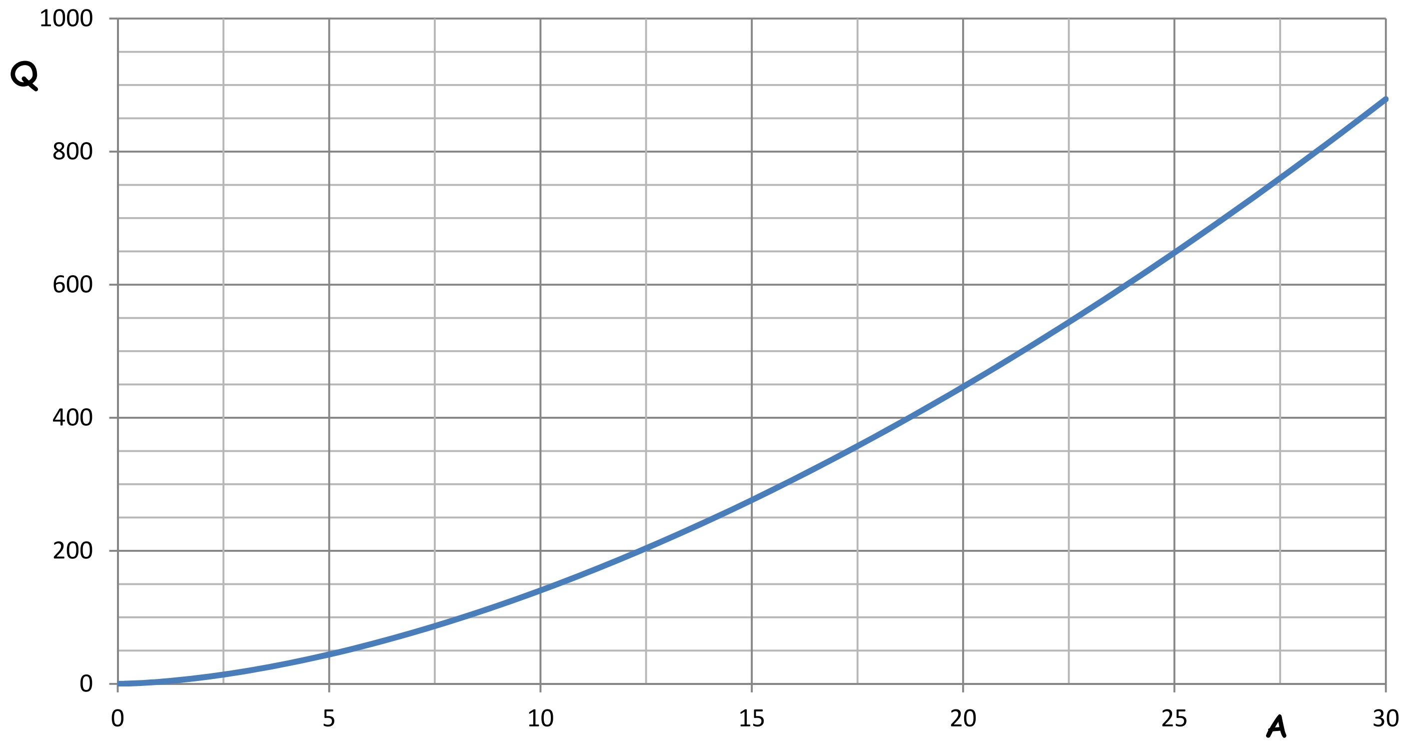
2. si trascura il non parallelismo fra superficie libera e fondo, confondendo cioè la pendenza motrice con la pendenza del fondo, cosicché l'equazione del moto si traduce in un bilancio tra effetti gravitazionali associati alla pendenza del fondo e azioni tangenziali sul perimetro bagnato (**modello cinematico**)

Il modello dell'onda cinematica

In tali ipotesi è possibile sostituire l'equazione completa del moto, cioè l'equazione di de Saint Venant, con la scala di deflusso.

$$\begin{cases} V\dfrac{\partial h}{\partial s}+h\dfrac{\partial V}{\partial s}+\dfrac{\partial h}{\partial t}=0 \\ i-j=0 \end{cases}$$

Nella sostanza $Q = kA^m$



Sia noto l'andamento della variazione nel tempo di **A** [A(t)] o di **Q** [Q(t)] del corso d'acqua in una sezione iniziale in cui ha origine la coordinata spaziale **s**.

Il problema della propagazione consiste nella ricerca della funzione *A(*s,t) (o Q(s, t)) in ogni sezione s localizzata a valle della sezione iniziale ed in ogni istante *t* successivo all'istante iniziale

Si faccia riferimento alla scala di deflusso e assumiamo l'**alveo cilindrico**:
il carattere cilindrico dell'alveo implica che la scala deflusso non cambia al variare della coordinata spaziale s, cioè le quantità **m** e **k** sono da considerarsi costanti.

La scala di deflusso istituisce una relazione biunivoca fra A e Q, che può essere interpretata come una funzione composta di forma:

$$Q = Q[A(s,t)]$$

La portata dipende dunque dalla coordinata spaziale s e dal tempo t solo implicitamente attraverso la sua dipendenza dall'area della sezione, da cui consegue che:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{dQ}{dA}\frac{\partial A}{\partial s}$$

D'altra parte si ha : $\dfrac{dQ}{dA} = mkA^{m-1} = m\dfrac{Q}{A} = c(A)$

da cui $\dfrac{\partial Q}{\partial s} = c(A)\dfrac{\partial A}{\partial s}$ che sostituita nell'equazione di continuità fornisce l'equazione dell'onda cinematica nella forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial t} + c(A)\frac{\partial A}{\partial s} = 0$$

ove con c(A) si identifica la celerità con cui l'onda si propaga.

Il caso delle onde di piccola ampiezza

Le onde di piena nei corsi d'acqua non sono quasi mai **onde di piccola ampiezza**: la superficie libera subisce infatti oscillazioni confrontabili o addirittura superiori alla profondità iniziale della corrente, anche se ha comunque una qualche utilità il caso in cui le oscillazioni di livello sono piccole rispetto alla profondità iniziale.

Allora si può trascurare l'effetto delle variazioni di area A sulla celerità per cui è lecito assumere:

$$c = c(A) = c_0$$

In tal caso l'equazione dell'onda cinematica assume una forma molto semplice

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c_0 \frac{\partial A}{\partial s} = 0 \Rightarrow A = f\left(s - c_0 t\right)$$

cioè qualsiasi funzione **f** (detta propagatoria) soddisfa l'equazione del modello cinematico.

La soluzione andrà poi scelta dunque in modo da soddisfare le condizioni iniziali, da cui che :

$$f\left(s - c_0 t\right)\Big|_{s=0} = A_0\left(\tau\right)$$

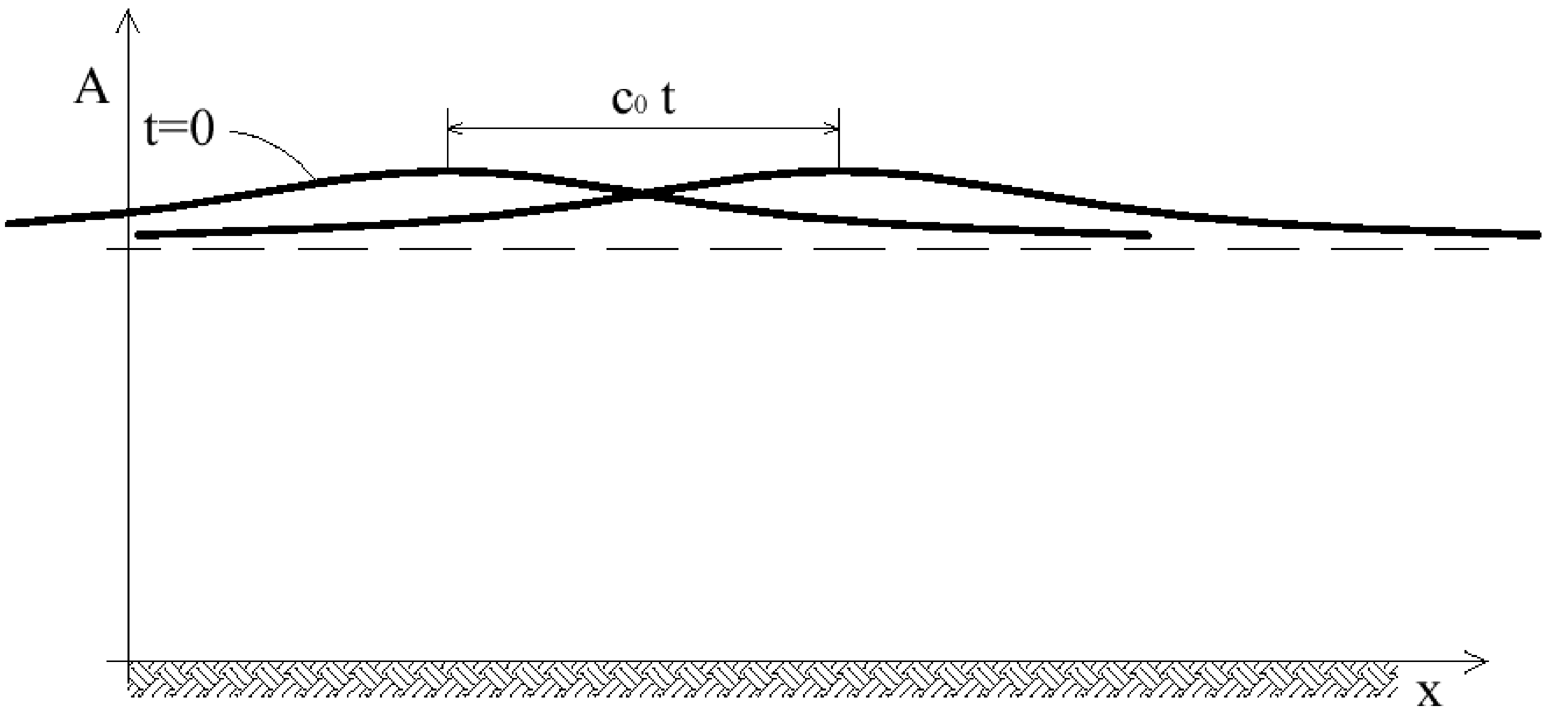
e, come conseguenza, che la soluzione è :

$$A = A_0\left(s - c_0 t\right)$$

Tale equazione descrive un'oscillazione del pelo libero identica a quella che si realizza nella sezione iniziale traslata nel tempo: più precisamente, nella sezione **s** si realizza all'istante (**t + s/c_0**) lo stesso valore di **A** che, nella sezione iniziale si realizza all'istante **t**.

Del resto, la soluzione descrive un profilo iniziale $A_0(s)$ che, all'istante generico t, è traslato verso valle di una distanza c_0 t mantenendo inalterata la sua forma. Dunque:

un'onda di piccola ampiezza si propaga con celerità c_0 costante senza subire variazioni di ampiezza (non si attenua né si amplifica) o di forma (non si irripidisce)



Il caso delle onde di grande ampiezza

L'equazione dell'onda cinematica nella sua forma generale è un'equazione differenziale non lineare poiché contiene termini in cui compaiono prodotti fra la funzione incognita e se stessa o le sue derivate. Tale equazione, ancorché assai semplice, contiene molti degli ingredienti tipici delle onde non lineari.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c(A)\frac{\partial A}{\partial s} = 0$$

La sua soluzione si ottiene immediatamente osservando che lungo ciascuna curva del piano orario *(s,* t) nel quale è valida la condizione :

$$\frac{ds}{dt} = c(A)$$

si ha che:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c(A)\frac{\partial A}{\partial s} = \frac{dA}{dt} = 0$$

In altre parole la derivata totale della funzione incognita rispetto al tempo è nulla per un osservatore che si muove lungo una curva caratteristica, quindi su ciascuna di tali curve l'area della sezione A (e, quindi, Q) si mantiene costante.

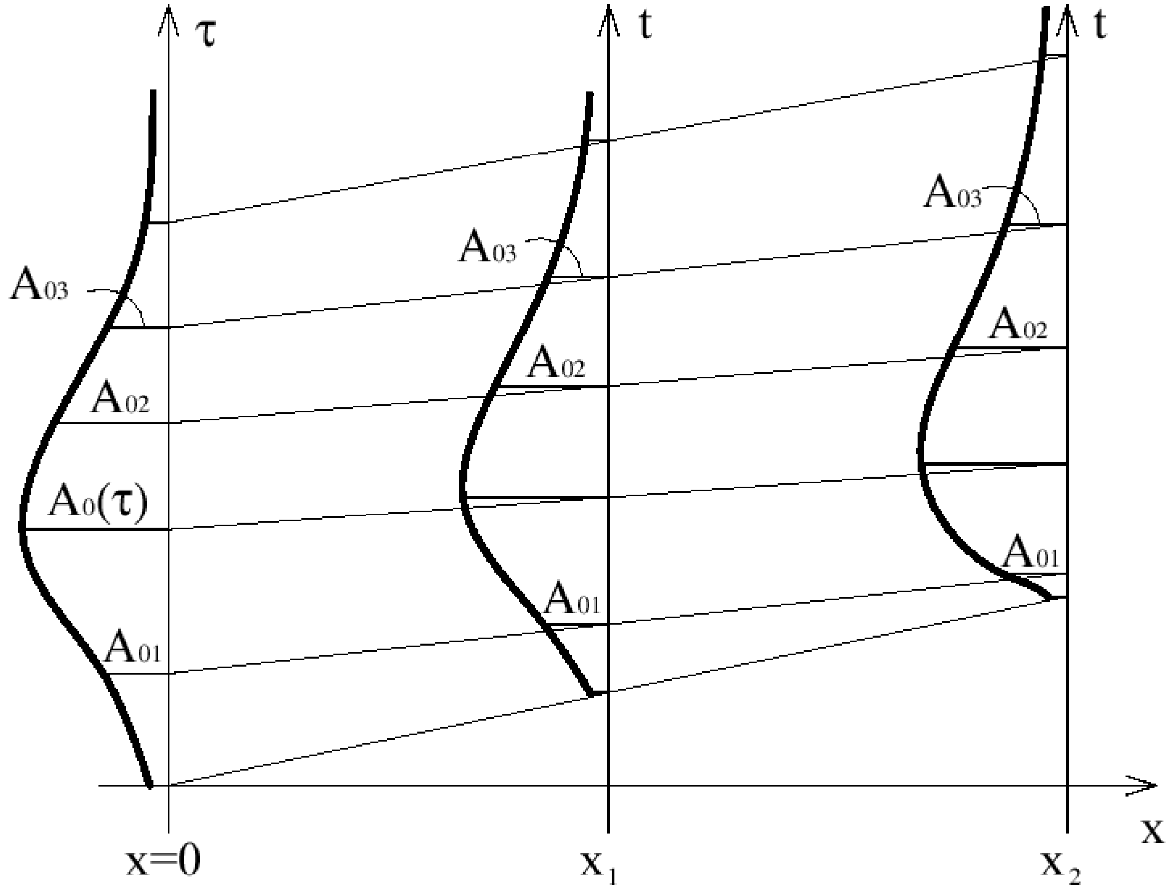
Se si verifica tale condizione anche la celerità risulta costante, per cui le curve caratteristiche sono in realtà rette caratterizzate da pendenza costante c(A)

Tale considerazione suggerisce un procedimento grafico per la soluzione.

Si considera il piano orario (s, t) e si rappresenta lungo l'asse delle ordinate l'andamento della funzione $A_0(t)$ che identifica l'idrogramma iniziale.

Da ciascun punto delle ordinate (cioè a ciascun istante iniziale t) si traccia una retta di pendenza costante 1/ $c(A_0(t))$ lungo la quale il valore di A si mantiene costante e pari ad $A_0(t)$.

Tale condizione consente di costruire l'idrogramma in ogni sezione s traslando i valori iniziali di A lungo ciascuna curva caratteristica.



La costruzione grafica illustrata nella figura mostra che:

nella fase crescente della piena, la celerità cresce e la pendenza delle linee caratteristiche diminuisce, sicché esse convergono: l'effetto della convergenza è un irripidimento del fronte dell'onda;

nella fase decrescente della piena, la celerità cresce e la pendenza delle linee caratteristiche cresce, sicché esse divergono: l'effetto della divergenza è un appiattimento della coda dell'onda.

Il modello dell'onda parabolica

In tali ipotesi è possibile trascurare la presenza dei termini inerziali dall'equazione completa del moto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial s} + B\dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial s} = i - j \end{cases}$$

Supponendo la larghezza B costante e derivando l'equazione di continuità rispetto allo spazio e quella del moto rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} + B\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = -\frac{\partial J}{\partial t}$$

Da cui che

$$\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{\partial J}{\partial t}$$

Ma la cadente J è funzione della portata e del tirante, per cui:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}$$

Sostituendo nell'espressione della derivata temporale della cadente, la derivata del tirante rispetto al tempo, come definita dall'equazione di continuità, cioè:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial s}$$

si ha che :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B}\frac{\partial J}{\partial h}\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial J}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B}\frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}}\frac{\partial Q}{\partial s}\right]$$

da cui che l'equazione di continuità

$$\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{\partial J}{\partial t}$$

diviene :

$$\frac{1}{B\frac{\partial J}{\partial Q}}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B}\frac{\frac{\partial J}{\partial h}}{\frac{\partial J}{\partial Q}}\frac{\partial Q}{\partial s} \qquad \Rightarrow \qquad D\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial s}$$

Avendo posto: $$D = \frac{1}{B\dfrac{\partial J}{\partial Q}}$$ e $$c = -\frac{1}{B}\frac{\dfrac{\partial J}{\partial h}}{\dfrac{\partial J}{\partial Q}}$$

ove **c** rappresenta la celerità dell'onda cinematica.

Infatti si ha che $$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial Q}\left[\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial s}\right]$$

che nel caso di onda cinematica, per cui è J=i e quindi indipendente dal tempo, diventa

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{dQ}{dt} = 0$$

Da cui, dall'equazione del modello parabolico, si ricava che un osservatore che scende lungo il corso d'acqua con velocità c, vede variare la portata secondo la legge:

$$\frac{dQ}{dt} = D\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}$$

Nell'intorno del massimo spaziale della portata, la sua derivata seconda è minore di zero.

Pertanto l'osservatore che scende lungo il corso d'acqua con celerità **c** osserva una diminuzione della portata nell'intorno del colmo, da cui che l'onda si appiattisce.

Utilizzando la formula di Chezy, valida nel moto uniforme, si ottiene dall'equazione del moto semplificata adottata dal modello parabolico:

$$Q = \chi A \sqrt{RJ} = \chi A \sqrt{R\left(i - \partial h / \partial s\right)} = Q_0 \sqrt{1 - \frac{\partial h / \partial s}{i}}$$

per cui il legame tra le portate e le altezze d'acqua non è più biunivoco.

In particolare la portata che corrisponde all'altezza d'acqua h in una data sezione è uguale a quella di moto uniforme, solo se la sezione è quella in cui l'altezza d'acqua raggiunge, nell'istante considerato, il massimo valore nello spazio.

In particolare :

- nelle sezioni più a valle del massimo spaziale del tirante $\partial h / \partial s < 0 \Rightarrow Q > Q_0$
- nelle sezioni più a monte del massimo spaziale del tirante $\partial h / \partial s > 0 \Rightarrow Q < Q_0$

Ne consegue che la sezione in cui si osserva il massimo spaziale della portata

$$\partial Q / \partial s = 0$$

si trova più a valle di quella in cui si osserva il massimo del tirante :

$$\partial h / \partial s = 0$$

Inoltre dall'equazione di continuità $\frac{\partial Q}{\partial s} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0$

segue che nella sezione dove si ha il massimo spaziale della portata $\partial Q / \partial s = 0$

si ha anche il massimo temporale del tirante $\partial h / \partial t = 0$

Consideriamo ora la sezione in cui la portata assume il massimo valore nel tempo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Dall'equazione del modello parabolico segue che

$$\frac{D}{c}\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} = \frac{\partial Q}{\partial s}$$

E' logico supporre che il massimo temporale della portata si trovi in un intorno del massimo di portata nello spazio, in corrispondenza del quale:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2} < 0$$

essendo D e c quantità definite positive, se ne deriva che nella sezione dove si raggiunge il massimo temporale della portata si ha che:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} < 0$$

per cui la sezione in cui si presenta il massimo temporale della portata si trova a valle di quella in cui la portata assume il massimo valore nello spazio.

Da monte verso valle si incontrano quindi successivamente:

- il massimo livello nello spazio
- la massima portata nello spazio (massimo livello nel tempo)
- la massima portata nel tempo.

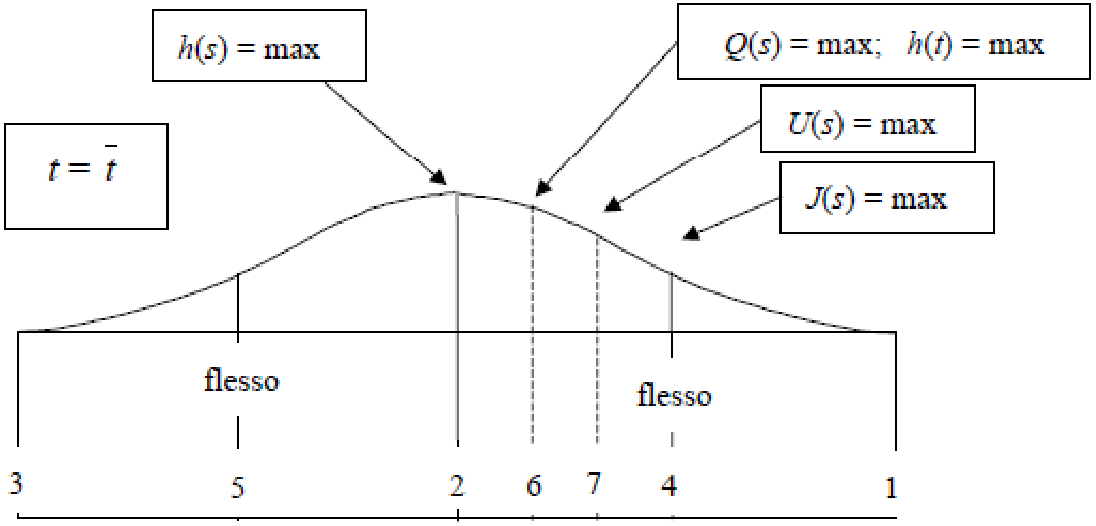
Nella *generica* sezione si susseguono:

- la massima portata tra tutte quelle osservate nella sezione
- il livello massimo tra tutti quelli osservati (contemporaneamente la portata è la massima tra tutte quelle osservabili lungo il corso d'acqua => ciò è possibile perché l'onda si lamina);
- il massimo livello nello spazio; in questo istante la portata è quella corrispondente all'altezza di moto uniforme.

Noto il sistema di equazioni con approssimazione parabolica

$$\begin{cases} Q = Q_0 \sqrt{1 - \dfrac{\partial h / \partial x}{i}} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial s} + B \dfrac{\partial h}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

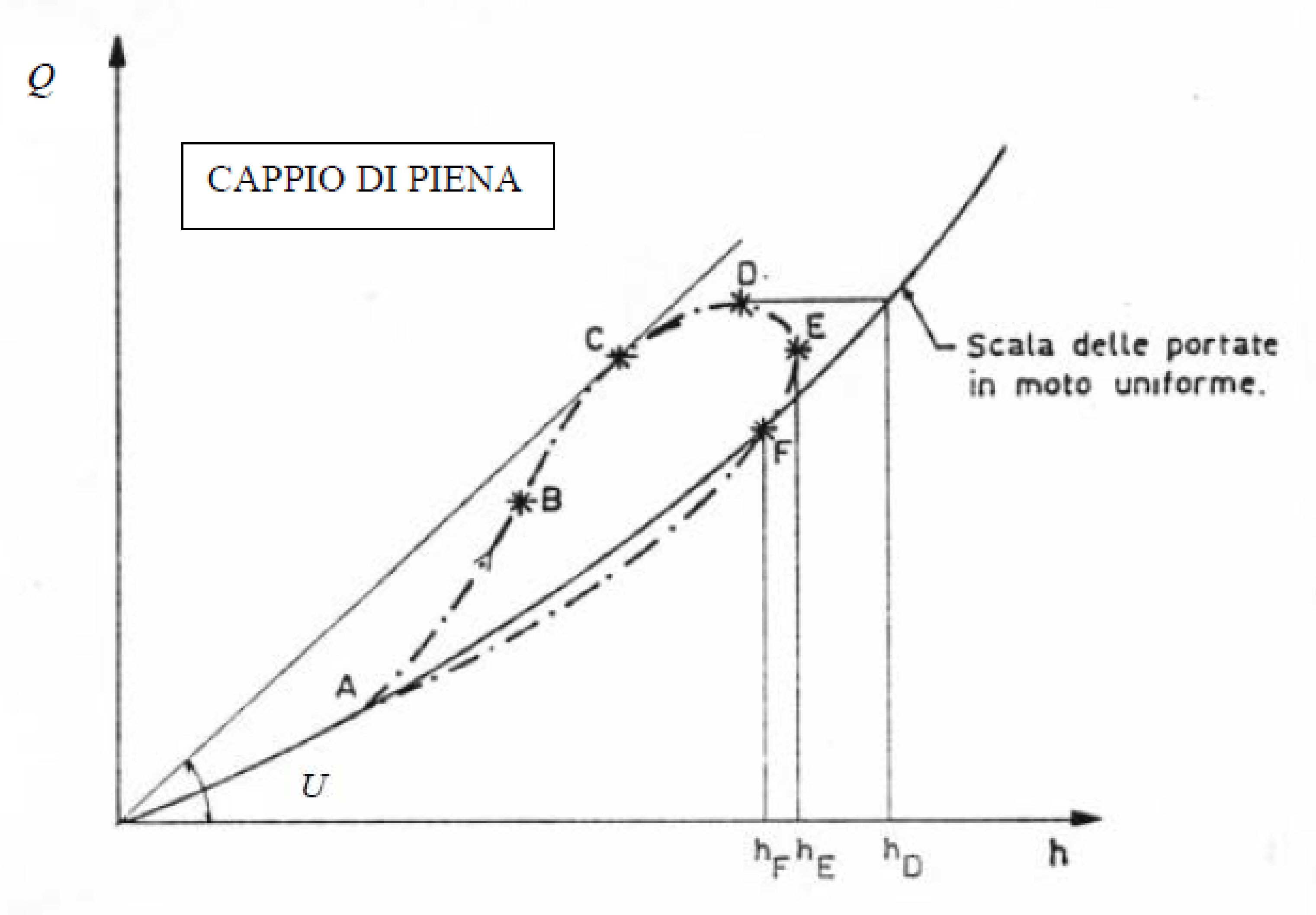
In figura è schematizzato un profilo delle altezze $h(s, t = t_0)$ con analisi sul segno delle diverse grandezze coinvolte.



$\partial h/\partial s$	> 0		0		< 0	dalla figura
$\partial^2 h/\partial s^2$	> 0	0	< 0	0	> 0	dalla figura
Q/Q^*	< 1		1		> 1	dalla (5.4)
$\partial Q/\partial s$	> 0		0		< 0	
$\partial h/\partial t$		<0	0	> 0		

CAPPIO DI PIENA

Rappresenta ciò che avviene in una certa sezione in funzione del tempo, durante il passaggio di un’onda di piena schematizzata con il modello parabolico



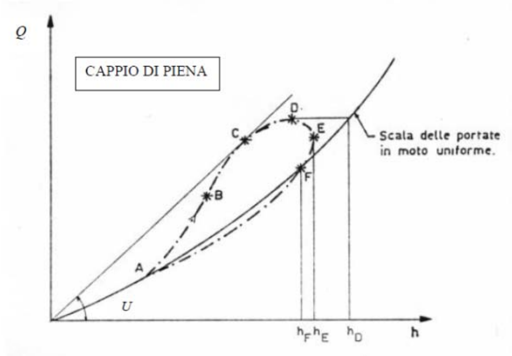
Si suppone che all'arrivo dell'onda ci si trovi nel punto A della scala delle portate del moto uniforme.

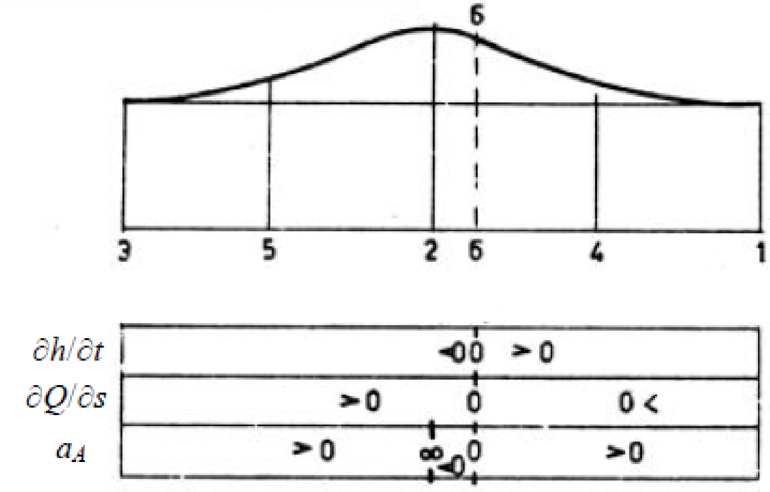
Dapprima arriva il fronte dell'onda (tratto 1-4), in cui Q/Q* > 1; durante la permanenza del tratto 1 – 4 del fronte, nella sezione indagata la portata aumenta più di quanto compete alle condizioni di moto uniforme.

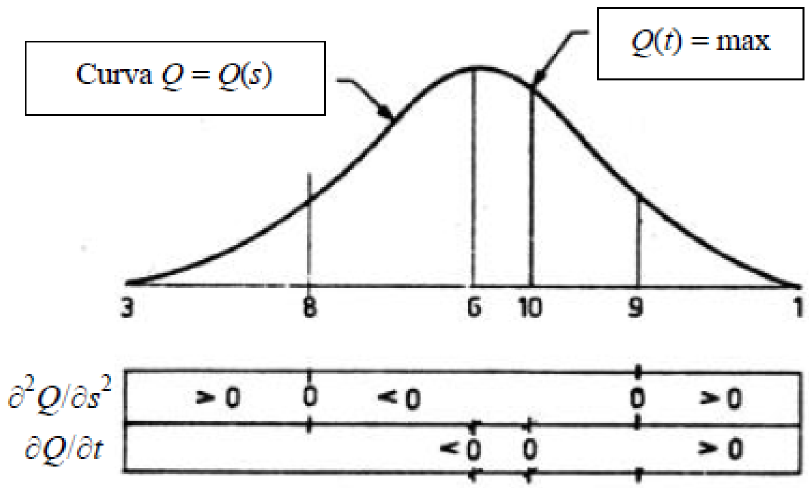
Si raggiunge poi il punto B, coincidente con la posizione in cui si ha il massimo temporale della variazione di portata (∂Q/∂t è massimo), quindi il punto C, in cui si ha la velocità media massima.

Successivamente arriva il punto 10 = D, in cui si ha il massimo temporale della portata (Q(t) è massimo), quindi il punto E = 6, in cui si ha il massimo temporale dei livelli (h(t) è massimo) e poi il punto F =2 che è il colmo longitudinale dell'onda, in cui Q = Q*.

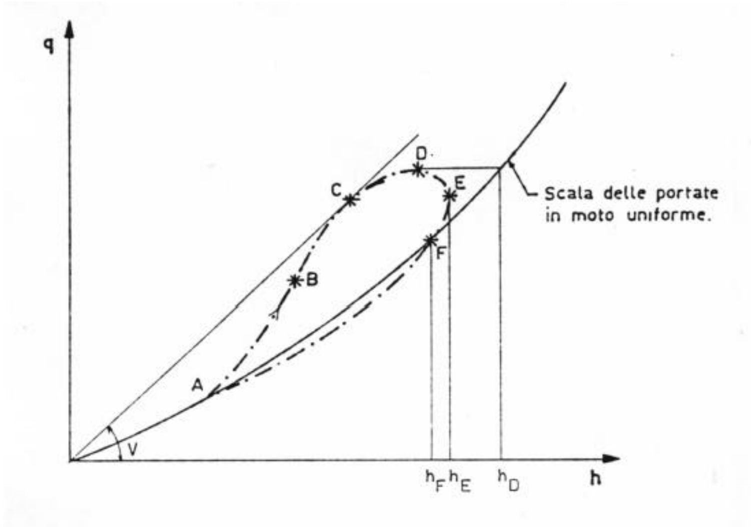
Segue poi la coda dell'onda, in cui Q < Q*.







Quindi, durante il passaggio di un'onda di piena parabolica in una assegnata sezione si verifica dunque la seguente successione temporale:



B	massimo di $\partial Q/\partial t$
C	massimo di V
D	massimo di Q(t)
E	massimo di h(t) che coincide con il massimo di Q(s)
F	massimo di h(s)

seguendo la stessa successione riportata in figura, con riferimento al profilo longitudinale istantaneo dell'onda.