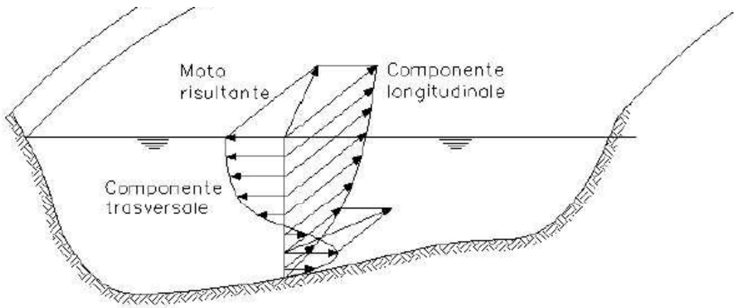
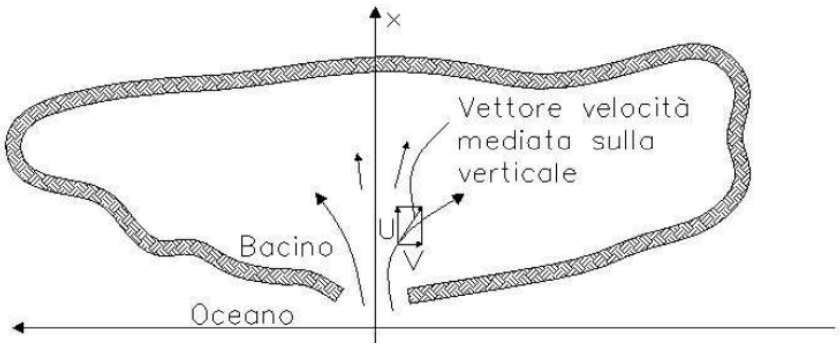
IDRODINAMICA FLUVIALE

I processi di moto nei corsi d'acqua possono essere descritti attraverso modelli interpretativi caratterizzati da diversi gradi di complessità, a seconda del problema che si vuole affrontare.

-Modelli tridimensionali (es. moto in un'ansa fluviale)



-Modelli bidimensionali (es. propagazione della marea in un bacino confinato)



-Modelli unidimensionali (es. propagazione di una piena fluviale)
-Modelli zero-dimensionali (es. riempimento/svuotamento di un serbatoio)

MOTO VARIO NELLE CORRENTI A SUPERFICIE LIBERA

I modelli matematici di moto vario per correnti a superficie libera hanno lo scopo di individuare (simulare) un campo di flusso non-stazionario e sono costruiti partendo dalle equazioni differenziali del moto e della continuità.

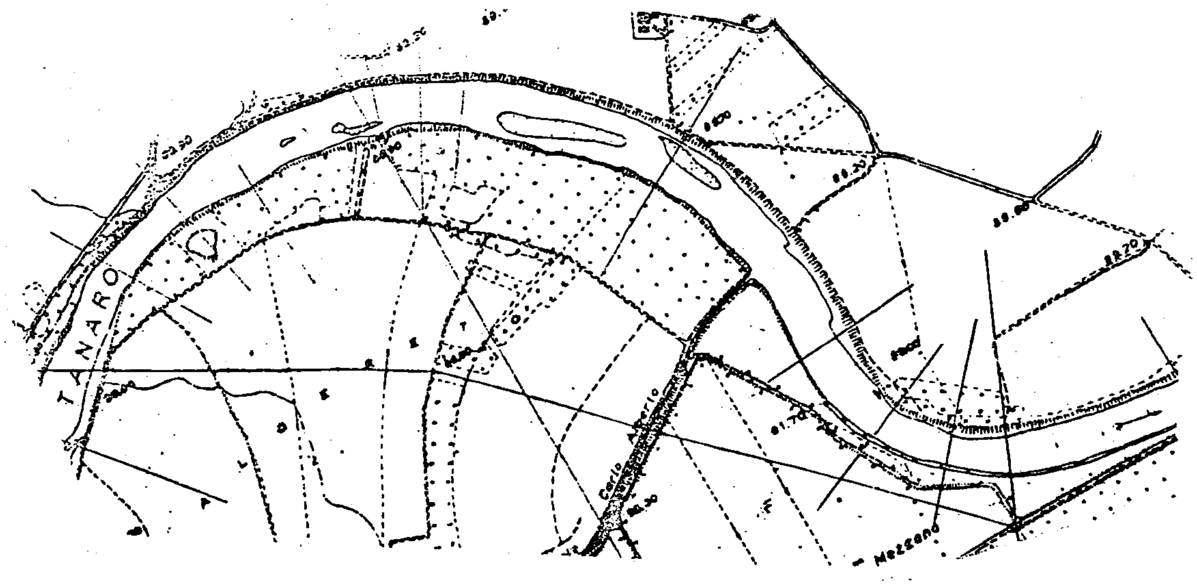
Il fenomeno è tipicamente tridimensionale e può svilupparsi in un dominio di geometria non sempre nota; inoltre, le caratteristiche strutturali dello stesso contorno possono essere estremamente variabili lungo il percorso, come, ad esempio, la scabrezza che può variare fortemente nello spazio e nel tempo.

I diversi modelli attualmente utilizzati per la descrizione di tali fenomeni si distinguono essenzialmente in base alle diverse semplificazioni che vengono apportate alla forma generale delle equazioni del moto vario.

In alcune situazioni, ad esempio, sarà possibile pervenire a forme semplificate che tuttavia sono in grado di riprodurre gli aspetti salienti del problema in esame.

Il modello unidimensionale: la corrente

Nei corsi d'acqua, nei canali artificiali e nei canali lagunari, il campo di moto può essere descritto adottando il modello di corrente, individuando cioè una *direzione prevalente del moto*, che è in generale ad andamento curvilineo.



Definite quindi *sezioni* della corrente le intersezioni di essa con piani ortogonali alla linea coordinata s prescelta per rappresentare la direzione della corrente, si fa riferimento a grandezze dinamiche (velocità, quantità di moto, energia) mediate nel piano della sezione. Esse risultano quindi funzioni delle sole coordinate spaziale s e temporale t.

Il modello unidimensionale: la corrente

Si noti che la scelta di s è in qualche misura arbitraria, non potendo essere in generale riferita all'assetto tridimensionale della corrente, parte del quale (es. superficie libera e fondo mobile) è a priori non noto.

Condizioni perché l'adozione dello schema di corrente sia giustificato:

- le curvature della linea d'asse siano piccole (moti secondari modesti);
- le variazioni spazio-temporali della forma della sezione siano sufficientemente lente (vincolo di quasi-unidirezionalità del moto).

Inoltre, adottando il modello unidimensionale si assume che:

- la velocità verticale è più piccola di almeno un ordine di grandezza rispetto alla velocità orizzontale (vero nell'ipotesi di acque basse);

- la velocità trasversale è un ordine di grandezza più piccola rispetto a quella nella direzione prevalente del moto;

- la superficie libera è orizzontale nella direzione trasversale (ovvero si trascurano le variazioni trasversali del carico piezometrico)

Riassumendo nella derivazione delle ***Equazioni di De Saint-Venant*** si adottano le seguenti ipotesi:

1) Il flusso è mono-dimensionale; le grandezze che definiscono la corrente idrica sono funzioni continue del tempo t e della coordinata s, misurata lungo la linea di massima pendenza dell'alveo. Questo implica che **in ogni sezione trasversale** normale alla direzione della corrente la velocità è costante e la superficie libera è rappresentabile come un segmento orizzontale.

2) La corrente è gradualmente variata, così che la distribuzione delle pressioni p è di tipo idrostatico sulle singole sezioni trasversali

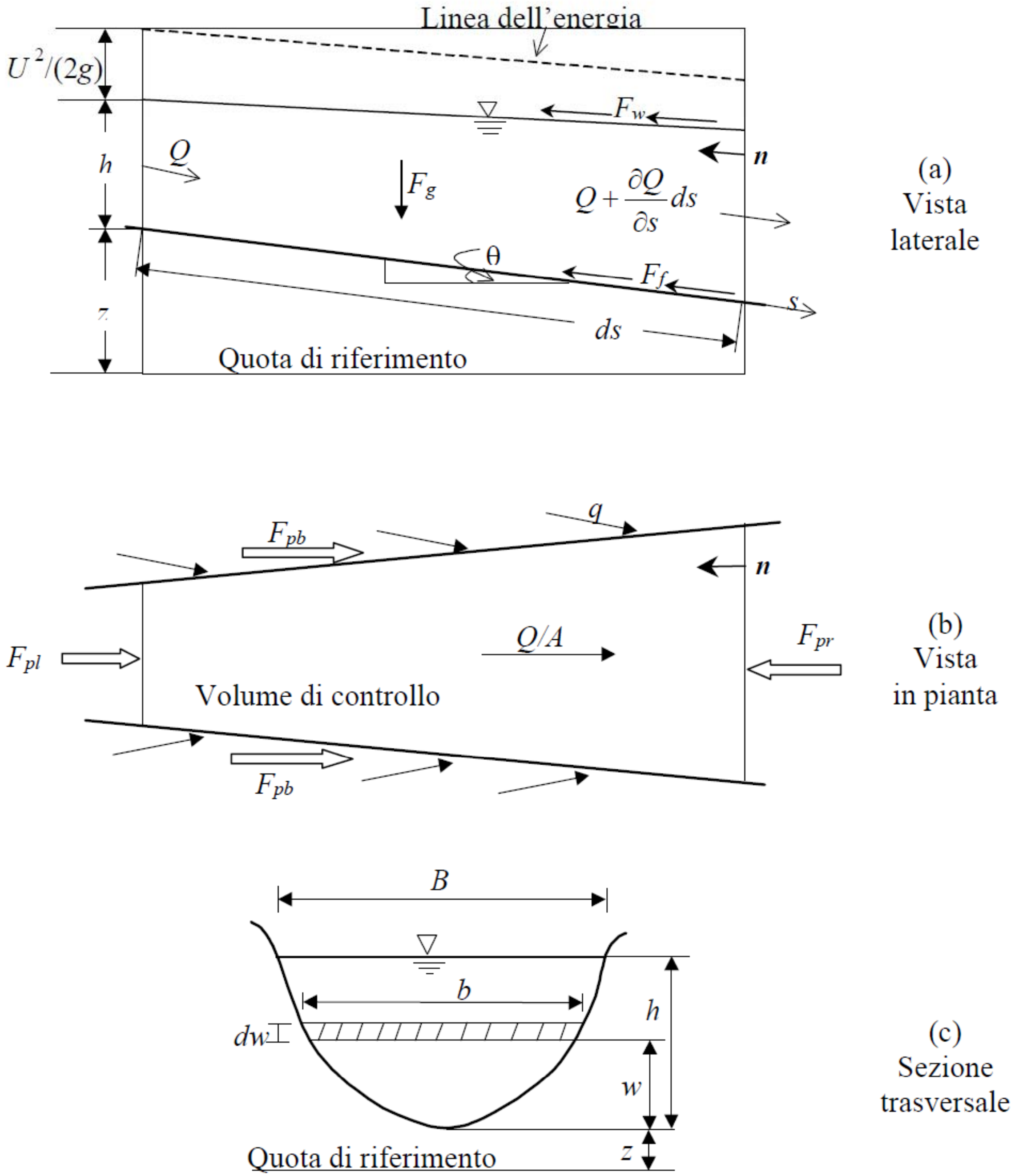
3) L'asse longitudinale del canale è approssimato da una linea retta.

4) La pendenza del canale è piccola e la geometria del letto è fissata.

5) Le leggi di resistenza del moto stazionario puramente turbolento sono applicabili nella descrizione degli effetti delle resistenze.

6) Il fluido è incomprimibile e a densità costante.

Si consideri un tronco d'alveo fluviale compreso fra due sezioni.



In figura sono rappresentati:

(a) il profilo di un volume di controllo elementare di lunghezza ds nel canale,

(b) la pianta di detto volume

(c) lo schema della generica sezione trasversale di area *A*.

Equazione di continuità

Il principio di conservazione della massa impone invece che (ρ=cost)

$$\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial A(s,t)}{\partial t} = q(s,t)$$

in cui **Q** è la portata volumetrica che attraversa la sezione liquida ***A*** mentre **q** rappresenta la somma degli afflussi/deflussi che entrano/escono nel/dal tronco di corrente considerato, in termini di portata per unità di lunghezza del canale.

La stessa equazione, nelle medesime ipotesi, può essere scritta in funzione di V e h come segue, nell'ipotesi di alveo rettangolare di larghezza B, in aasenza di immissioni

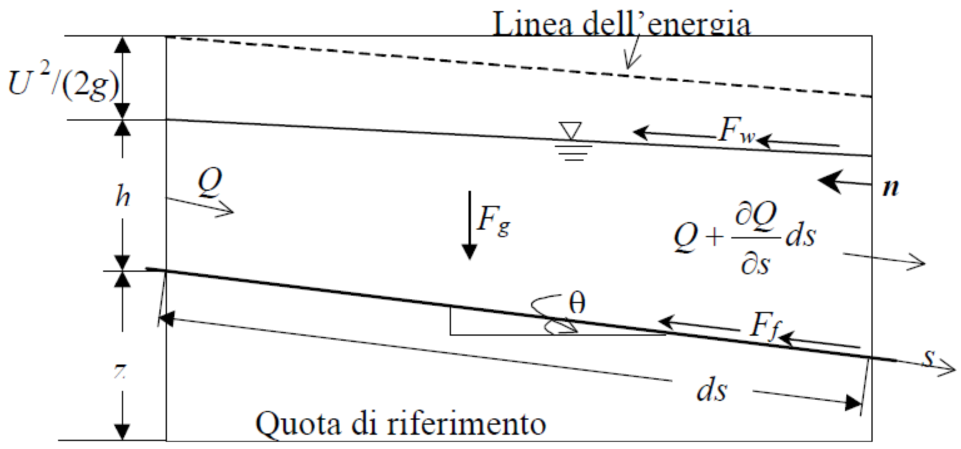
$$Bh\frac{\partial V}{\partial s} + VB\frac{\partial h}{\partial s} + B\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h\frac{\partial V}{\partial s} + V\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Equazione di moto o di de Saint Venant (1871)

L'equazione di una corrente lineare in moto vario viene ricavata scrivendo l'equazione di bilancio delle forze agenti sul volume di controllo per proiettarla poi lungo la direzione del canale.

Dall'equazione globale dell'equilibrio dinamico si ottiene:

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho v dW - \int_\Omega v \rho (vn) \, d\Omega$$



in cui **W** rappresenta il volume di controllo di superficie laterale Ω, con versore normale entrante **n**;

ρ è la densità del fluido;

v è il vettore delle velocità locali della corrente;

ΣF è la risultante delle forze di massa e di superficie che agiscono sul fluido contenuto nel volume W.

L'equazione $$\sum F = \frac{\partial}{\partial t}\int_w \rho v dW - \int_\Omega v\rho(vn)\, d\Omega$$

indica che la somma delle forze applicate alla massa racchiusa nel volume *W* è uguale al tasso di variazione nel tempo della quantità di moto immagazzinata in *W* più il flusso netto di quantità di moto attraverso la superficie laterale di controllo Ω.

Ci sono in genere cinque forze agenti sul volume di controllo nella direzione del moto

$$\sum F = F_g + F_f + F_e + F_w + F_p$$

in cui
F_g è la forza dovuta al peso dell'acqua contenuta nel volume di controllo;
F_f è la forza resistente per attriti che si sviluppa lungo il contorno solido del volume W;
F_e è la forza che si produce a seguito di improvvise variazioni di sezione (allargamenti e/o restringimenti) nel volume di controllo;
F_w rappresenta le forze di superficie trasmesse attraverso la superficie libera (ad esempio l'azione del vento);
F_p è la forza di pressione.

PESO: Il volume di fluido nel volume di controllo è *A ds ed il suo peso è ρ g A ds.* Per piccole inclinazioni dell'alveo, la pendenza si può porre i = tg $\theta \approx$ sin θ e la componente di interesse (nella direzione del moto) della forza peso è

$$F_g = \rho g A ds \sin\theta \approx \rho g A ds\, i$$

RESISTENZE: Le forze resistenti create da attriti lungo il fondo e le pareti laterali del volume di canale di controllo sono date da - τ_0 P ds, in cui τ_0 è lo sforzo tangenziale medio al contorno e P il perimetro bagnato. Adottando per gli sforzi tangenziali l'espressione $\tau_0 = \gamma\, R\, J = \rho\, g\, (A/P)\, J$, si ottiene:

$$F_f = -\rho g A ds\, J$$

PRESSIONE: Le forze di pressione sono date dalla somma algebrica delle componenti nella direzione del moto delle forze idrostatiche esercitate rispettivamente dalla superficie di sinistra del volume di controllo, F_{pm}, dalla superficie destra, F_{pv}, e dalle sponde, F_{pl}. Quindi $\mathbf{F_p = F_{pm} - F_{pv} + F_{pl}}$.

Le forze che agiscono sulle superfici di monte e a valle del volume di controllo sono:

$$F_{pm} = \int_0^h \rho g (h - w) b dw \qquad F_{pv} = F_{pm} + \frac{\partial F_{pm}}{\partial s} ds$$

Ove si ha che :

$$\frac{\partial F_{pm}}{\partial s}=\int_0^h \rho g\frac{\partial h}{\partial s}bdw+\int_0^h \rho g\left(h-w\right)\frac{\partial b}{\partial s}dw=\rho g\frac{\partial h}{\partial s}A+\int_0^h \rho g\left(h-w\right)\frac{\partial b}{\partial s}dw$$

Inoltre, la forza dovuta alle sponde è data dal tasso di restringimento (allargamento) del canale lungo il tratto ds

$$F_{pl}=\left[\int_0^h \rho g\left(h-w\right)\frac{\partial b}{\partial s}dw\right]ds$$

Ne rinviene quindi che :

$$F_p=F_{pm}-\left(F_{pm}+\frac{\partial F_{pm}}{\partial s}ds\right)+F_{pl}=-\frac{\partial F_{pm}}{\partial s}ds+F_{pl}$$

$$F_p=-\left(\rho g\frac{\partial h}{\partial s}A+\int_0^h \rho g\left(h-w\right)\frac{\partial b}{\partial s}dw\right)ds+\left[\int_0^h \rho g\left(h-w\right)\frac{\partial b}{\partial s}dw\right]ds=-\rho g\frac{\partial h}{\partial s}Ads$$

Ne rinviene che la somma delle tre forze (peso, resistenze e pressione) è :

$$\sum F = F_g + F_f + F_p = \rho g A\left(i - j - \frac{\partial h}{\partial s}\right)ds$$

<u>FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO</u>. La portata di massa in ingresso nel volume di controllo elementare attraverso la porzione di superficie di contorno Ω_i (di immissione) vale ρ (Q + q ds).
Il corrispondente flusso di quantità di moto è:

$$\int_{\Omega_i} v\rho(v \bullet n)d\Omega_i = \rho(\beta_1 VQ + \beta_2 v_s q ds)$$

il termine ($\rho\ \beta_1$ VQ) è il flusso di quantità di moto entrante attraverso la sezione di monte dell'alveo e ($\rho\ \beta_2\ v_s$ q ds) è il flusso di quantità di moto portato dagli afflussi laterali, che hanno velocità media v_s nella direzione s.

Il termine β è il coefficiente correttivo dei flussi di quantità di moto e tiene conto della non uniforme distribuzione della velocità nella sezione trasversale.

La sua espressione è $$\beta = \frac{1}{V^2 A}\int v^2 dA$$ e vale 1.01 in canali prismatici e 1.33 per sezioni di fiumi composite con golene (*Chow et al.*, 1988)

Il flusso di quantità di moto che esce dal volume di controllo attraverso la porzione di superficie di contorno Ω_u (di uscita) vale

$$\int_{\Omega_u} v\rho(v \bullet n)d\Omega_u = -\rho\left(\beta_3 VQ + \frac{\partial(\beta_3 VQ)}{\partial s}ds\right)$$

Ne rinviene che il flusso di quantità di moto netto attraverso la superficie di controllo $\Omega = \Omega_i + \Omega_u$ è dato dalla somma delle due componenti su definite, per cui, se β è assunto costante, esso vale:

$$\int_{\Omega} v\rho(v \bullet n)d\Omega = \rho(\beta VQ + \beta v_s q ds) - \rho\left(\beta VQ + \frac{\partial(\beta VQ)}{\partial s}ds\right) = \rho\left(\beta v_s q - \frac{\partial(\beta VQ)}{\partial s}\right)ds$$

<u>ACCUMULO DI QUANTITÀ DI MOTO</u>. Il tasso di incremento temporale della quantità di moto immagazzinata nel volume di controllo A ds è:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W} \rho v dW = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} ds$$

Sostituendo i termini su definiti nell'equazione globale del moto:

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{w} \rho v dW - \int_{\Omega} v\rho(vn)\, d\Omega$$

si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta \frac{Q^2}{A}\right) - \beta v_s q + gA\left(\frac{\partial h}{\partial s} - i + J\right) = 0$$

e in assenza di afflussi laterali :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\beta \frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial h}{\partial s} - i + J\right) = 0$$

Nell'ipotesi che β=1, la stessa equazione può essere riscritta in funzione di V ed h come segue :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} + g\left(\frac{\partial h}{\partial s} - i + J\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{Accelerazione locale}}+\underbrace{\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\beta\frac{Q^2}{A}\right)}_{\text{Accelerazione convettiva}}+g\left(\underbrace{\frac{\partial h}{\partial s}}_{\text{Effetto di pressione}}\underbrace{-i}_{\text{Effetto della gravità}}+\underbrace{J}_{\text{Effetto delle resistenze}}\right)=0$$

Le equazioni di de Saint-Venant hanno diverse forme semplificate, ciascuna atta a cogliere aspetti particolari di problemi pratici, il tutto mantenendo inalterata la forma dell’equazione di continuità.
Lo schema più semplice è quello dell’**onda cinematica**, che trascura gli effetti inerziali e delle variazioni della superficie libera. In tal caso si assume i =J, ipotizzando che le forze di resistenza e gravitazionali si bilancino perfettamente.
Il **modello parabolico o diffusivo** trascura i termini inerziali ma incorpora il termine di pressione.
Il **modello completo o dell’onda dinamica** considera tutti i termini.

Alcune considerazioni

Va osservato preliminarmente che nei corsi d'acqua naturali i due termini J e $\partial h/\partial s$ non sono inferiori a 10^{-4} – 10^{-5}, per cui trascurare il peso dei termini inerziali significa ammettere che essi siano inferiori a 10^{-5}.

$$\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} < 10^{-5} \Rightarrow \Delta V < 10^{-5} g\Delta t \approx 10^{-4}\Delta t$$

Se Δt = 1 ora = 3600 s allora si ha che ΔV < 0,36 m/s, quindi si può trascurare il termine inerziale locale quando non si ha una variazione di velocità in un'ora almeno di una tale entità (caso non infrequente)

$$\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial s} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial s} < 10^{-5} \Rightarrow \Delta V^2 < 2*10^{-5} g\Delta s \approx 2*10^{-4}\Delta s$$

Se Δs = 10 km allora $\Delta V^2 = V_2^2 - v_1^2 < 2$, per cui se V_1 è compreso tra 0 e 2 m/s si ha che V_2 è compreso tra $2^{0,5}$ e $6^{0,5}$

Poiché è altamente improbabile che si esca da tali limiti, anche il termine convettivo può essere trascurato

Infine, nel caso dei corsi d'acqua con pendenze dell'ordine di qualche per cento, in molte situazioni è lecito ricondursi al modello cinematico, trascurando la pendenza longitudinale della superficie libera $\partial h/\partial s$ rispetto ad i.

Viceversa, nel caso dei fiumi in cui le pendenze del fondo assumono valori dell'ordine del per mille (o del per diecimila) non si dovrebbe prescindere dagli effetti di $\partial h/\partial s$, ricorrendo alla schematizzazione parabolica o diffusiva.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} - g(i - J) = 0$$

onda cinematica

parabolico (diffusivo)

completo

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s} + g\frac{\partial h}{\partial s} - g(i - J) = 0$$

moto stazionario, uniforme

moto stazionario, non-uniforme

moto non-stazionario, non-uniforme