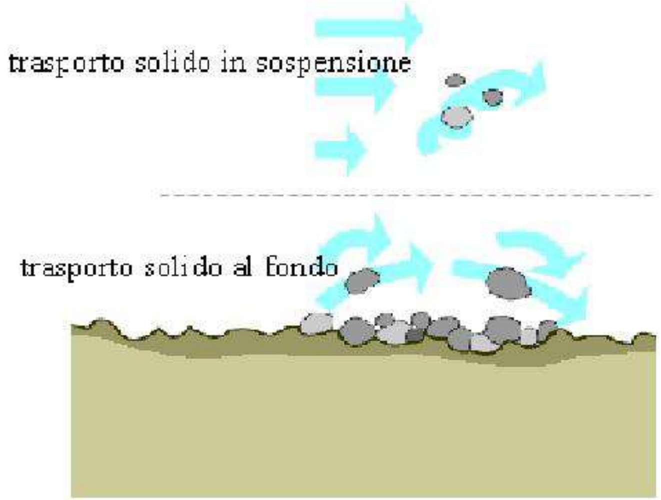
TRASPORTO SOLIDO IN SOSPENSIONE



Lo studio del trasporto solido in sospensione si riferisce ovviamente alle sole sospensioni, non facendo alcun riferimento alle soluzioni dove le due componenti (soluto e solvente) sono miscibili ed interagenti.

Si definisce concentrazione solida il rapporto tra volume occupato dalla fase solida V_s e quello occupato dalla miscela (solido + liquido) V_s+V_a:

$$C = \frac{V_s}{V_s + V_a}$$

Va preliminarmente osservato che il comportamento delle sospensioni molto diluite è regolato dalla **legge di Fick** per la quale la portata solida che attraversa una superficie elementare di normale y, $\mathbf{q_{s,y}}$, è proporzionale, secondo un coefficiente di diffusione ε_{sy}, alla variazione di concentrazione misurata lungo la normale alla superficie stessa:

$$q_{s,y} = -\varepsilon_{sy} \frac{\partial C}{\partial y}$$

In generale, si definisce il trasporto solido fluviale sospeso come somma di un processo di diffusione regolato dalla legge di Fick e di quello di moto della miscela che ha natura convettiva.

Lo studio del trasporto solido di una corrente bifasica si basa sul **<u>principio di conservazione della massa dispersa</u>**,
cioè, con riferimento ad un volume elementare di dimensioni **dx, dy e dz**, la variazione della massa di soluto all'interno del volume elementare in un intervallo di tempo **dt** è pari alla differenza tra la massa di soluto entrante e uscente dalle superfici di normale x, y e z

In tale ipotesi, facendo riferimento al solo termine convettivo, nel caso si ipotizzi il passaggio attraverso le due facce di normale y si avrebbe:

$$-\frac{\partial\left(CV_y\right)}{\partial y}dxdydzdt$$

mentre in rapporto al termine diffusivo, sempre attraverso le due facce di normale y, si avrebbe:

$$\varepsilon_{sy}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}dxdydzdt$$

Ripetendo analogo ragionamento per tutte le facce coinvolte si ottiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\varepsilon_{sx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \varepsilon_{sy} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \varepsilon_{sz} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial (CV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (CV_y)}{\partial y} + \frac{\partial (CV_z)}{\partial z} \right)$$

In un campo di moto assolutamente turbolento, è possibile distinguere il moto di trasporto da quello di agitazione turbolenta, per cui è possibile suddividere i valori istantanei delle grandezze nei loro valori medi temporali e nelle componenti fluttuanti

$$C = \overline{C} + C' \qquad\qquad V = \overline{V} + V'$$

In tali ipotesi, ogni elemento dell'equazione può essere valutato in riferimento al suo valor medio temporale nel tempo **T**:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial C}{\partial t} dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial C'}{\partial t} dt = \frac{\partial \overline{C}}{\partial t}$$

Ripetendo analogo ragionamento per tutte le facce coinvolte si ottiene

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\left(\varepsilon_{sx}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\varepsilon_{sy}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\varepsilon_{sz}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial(CV_x)}{\partial x}+\frac{\partial(CV_y)}{\partial y}+\frac{\partial(CV_z)}{\partial z}\right)$$

In un campo di moto assolutamente turbolento, è possibile distinguere il moto di trasporto da quello di agitazione turbolenta, per cui è possibile suddividere i valori istantanei delle grandezze nei loro valori medi temporali e nelle componenti fluttuanti

$$C=\overline{C}+C' \qquad\qquad V=\overline{V}+V'$$

In tali ipotesi, ogni elemento dell'equazione può essere valutato in riferimento al suo valor medio temporale nel tempo **T**:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial C}{\partial t}dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}dt+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial C'}{\partial t}dt=\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}$$

nell'ipotesi che il valor medio temporale, in ogni intervallo T, di una componente fluttuante è nullo.

Con analogo ragionamento si ha che

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial\left(CV_y\right)}{\partial y}dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial\left(\overline{C}\,\overline{V}_y + \overline{C}V_y' + C'\overline{V}_y + C'V_y'\right)}{\partial y}dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \overline{C}\,\overline{V}_y dt + \frac{1}{T}\int_0^T \overline{C}V_y' dt + \frac{1}{T}\int_0^T C'\overline{V}_y dt + \frac{1}{T}\int_0^T C'V_y' dt\right] = \frac{\partial \overline{C}\,\overline{V}_y}{\partial t} + \frac{\partial \overline{C'V_y'}}{\partial t}$$

dal quale deriva che:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\varepsilon_{sx}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \varepsilon_{sy}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \varepsilon_{sz}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial\left(CV_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(CV_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(CV_z\right)}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\left(C'V_x'\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(C'V_y'\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(C'V_z'\right)}{\partial z}\right)$$

Va tuttavia osservato come i termini diffusivi sono di un ordine di grandezza inferiore a quelli convettivi, per cui si ha:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\left(CV_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(CV_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(CV_z\right)}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial\left(C'V_x'\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(C'V_y'\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(C'V_z'\right)}{\partial z}\right)$$

Va altresì osservato, in caso di significativa sospensione, che le particelle solide hanno una velocità inferiore (v_s) a quelle liquide, per cui esiste una componente solida di tipo convettivo

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\left(\frac{\partial (CV_x)}{\partial x} + \frac{\partial (CV_y)}{\partial y} + \frac{\partial (CV_z)}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial (CV_{sx})}{\partial x} + \frac{\partial (CV_{sy})}{\partial y} + \frac{\partial (CV_{sz})}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial (C'V'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (C'V'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (C'V'_z)}{\partial z}\right)$$

Supposta l'equazione di continuità sia per la fase liquida [div (v)] = 0 che per quella solida [div (v_s)] = 0 si ha che:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\left(V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) - \left(V_{sx} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{sy} \frac{\partial C}{\partial y} + V_{sz} \frac{\partial C}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial (C'V'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (C'V'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (C'V'_z)}{\partial z}\right)$$

Nell'ipotesi di permanenza e bidimensionalità del moto, sia per la fase solida che per quella liquida, nell'ipotesi che x sia della direzione del moto e y quello ad esso normale e positivo verso l'alto, allora:

$$0 = -V_{sy}\frac{dC}{dy} - \frac{d\left(C'V_y'\right)}{dy}$$

essendo, per ipotesi, *C* variabile solo lungo y e nulle le componenti di velocità della fase liquida con direzione diversa da x.

Nell'ipotesi che l'alveo sia pressoché orizzontale (**V_x** modesta), si può ritenere che la velocità delle particelle solide **V_{sy}** sia assimilabile alla velocità di sedimentazione **w** delle stesse in acqua ferma, mentre il prodotto delle componenti fluttuanti può assumersi in analogia con lo schema diffusivo della legge di Fick, da cui:

$$w\frac{dC}{dy} + \varepsilon_{sy}\frac{d}{dy}\left(\frac{dC}{dy}\right) = 0$$

la quale è facilmente integrabile per variabili separabili conducendo a:

$$Cw + \varepsilon_{sy}\frac{dC}{dy} = 0$$

Ne rinviene quindi che ad una generica quota **y** dal fondo si stabilisce un equilibrio tra il flusso (verso il basso) di particelle che tendono a sedimentare per azione della forza di gravità (**Cw**) e il flusso (verso l'alto) di particelle che tendono ad essere sostenute dall'agitazione turbolenta **(**ε_{sy} **dC/dy**)

$$Cw+\varepsilon_{sy}\frac{dC}{dy}=0$$

L'integrazione di tale equazione richiede l'adozione di alcune ipotesi in merito al coefficiente di diffusione delle particelle solide ε_{sy}.

In accordo con Rouse, si ipotizzi una legge logaritmica di distribuzione delle velocità:

$$\frac{dV_x}{dy}=\frac{u^*}{ky}$$

in cui k è la costante di von Karman, pari a 0,4 in acqua limpida. Inoltre si assuma una distribuzione lineare degli sforzi tangenziali, con valore τ_0 al fondo e nullo in superficie:

$$\tau=\tau_0\left(1-\frac{y}{h}\right)$$

con h tirante idrico.

Infine si ipotizzi che il coefficiente di diffusione delle particelle solide ε_{sy} coincida con il coefficiente di Boussinesq ε_t il quale è presente nell'espressione dello sforzo tangenziale in condizioni di assoluta turbolenza:

$$\varepsilon_{sy} = \varepsilon_t = \frac{\tau}{\rho \frac{dV_x}{dy}} = \frac{\tau_0\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\rho \frac{u^*}{ky}} = u^* k y \left(1-\frac{y}{h}\right)$$

Le ipotesi suddette hanno validità qualora le particelle solide siano *isolate* e *piccole* rispetto alla scala della turbolenza. In tali condizioni risulta :

$$\frac{dC}{C} = -\frac{w}{\varepsilon_{sy}} dy = -\frac{w}{\varepsilon_t} dy = -\frac{w}{u^* k y\left(1-\frac{y}{h}\right)} dy$$

La precedente equazione può quindi essere integrata tra una quota **a** alla quale corrisponde una concentrazione $\boldsymbol{C_a}$ e una generica quota y:

$$\int_{C_a}^{C} \frac{dC}{C} = -\frac{w}{u^* k} \int_a^y \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{h}\right)} dy = -\frac{w}{u^* k} \int_a^y \frac{h}{y(h-y)} dy = \frac{w}{u^* k} \int_a^y d\left[\ln\left(\frac{h-y}{y}\right)\right]$$

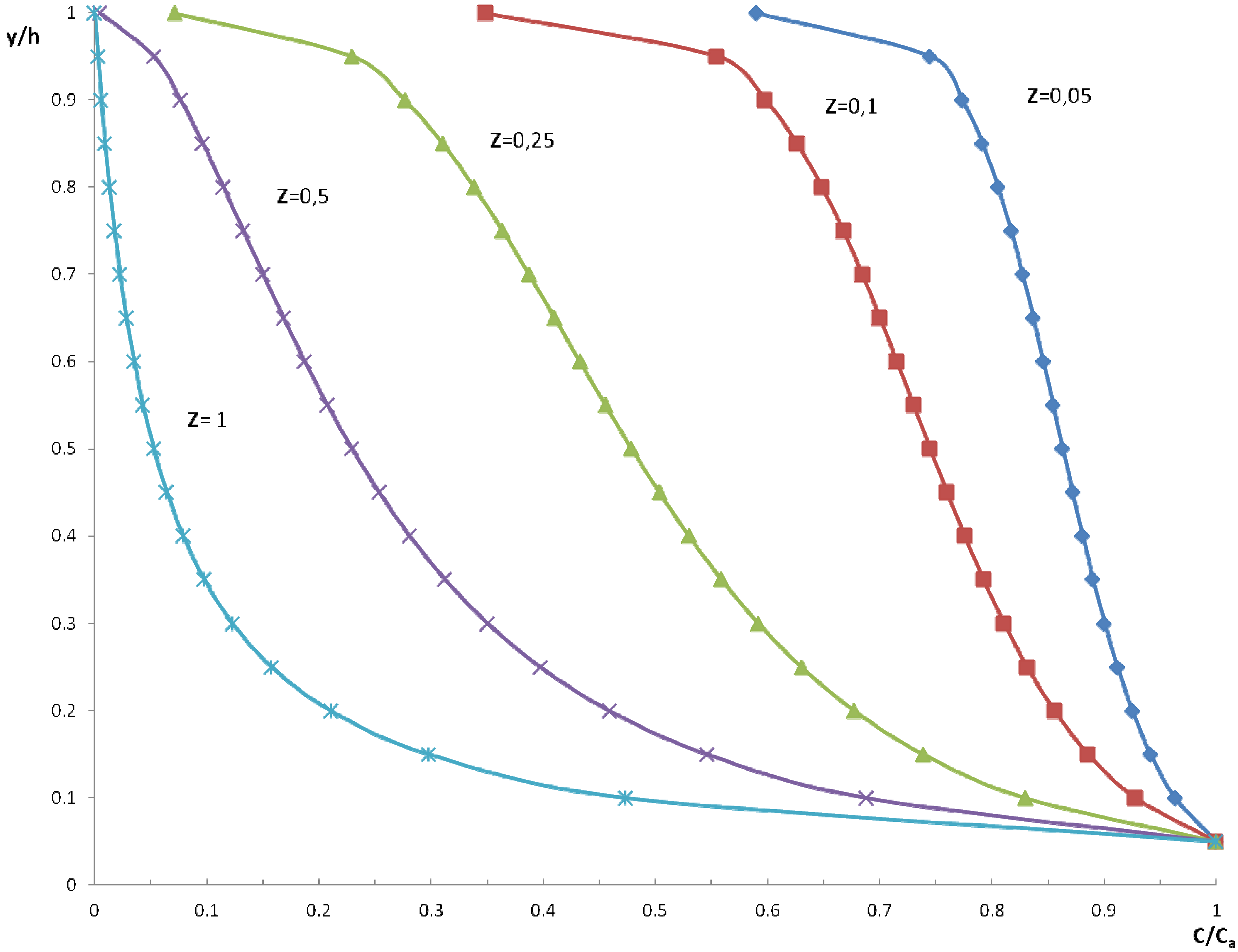
da cui rinviene evidentemente:

$$\left[\ln C\right]_{C_a}^{C} = \frac{w}{u^* k}\left[\ln\left(\frac{h-y}{y}\right)\right]_a^y$$

$$\frac{C}{C_a} = \left[\frac{\left(\frac{h-y}{y}\right)}{\left(\frac{h-a}{a}\right)}\right]^{\frac{w}{u^*k}} = \left[\frac{\left(\frac{h-y}{hy}\right)}{\left(\frac{h-a}{ha}\right)}\right]^{\frac{w}{u^*k}} = \left[\frac{\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{h}\right)}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{h}\right)}\right]^{\frac{w}{u^*k}} = \left[\frac{\frac{1}{y}\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\frac{1}{a}\left(1-\frac{a}{h}\right)}\right]^{\frac{w}{u^*k}} = \left[\frac{\frac{a}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)}{\frac{y}{h}\left(1-\frac{a}{h}\right)}\right]^{\frac{w}{u^*k}}$$

Ove si definisce Z o numero di Rouse la quantità adimensionale:

$$Z = \frac{w}{u^* k}$$



y/h
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
C/C$_a$
Z=0,05
Z=0,1
Z=0,25
Z=0,5
Z= 1

Concentrazione all'altezza *a* dal fondo

In presenza di fondo mobile è estremamente difficile la definizione stessa di fondo, e quindi la determinazione dell'altezza di riferimento **a**, ove porre le condizioni al contorno per il trasporto solido in sospensione.

Rouse (1937) ipotizzò **a** proporzionale al tirante idrico (**a=0,05 h**)

Einstein (1950) assunse **a = 2d** e la concentrazione proporzionale alla portata solida per unità di larghezza del trasporto di fondo $\mathbf{q_b}$:

$$C_a = \frac{1}{11{,}6}\frac{q_b}{au^*}$$

Engelund et al (1976) assunsero **a=0,015 h** in caso di fondo piano e **a=0,05 h** in presenza di dune mentre per $\mathbf{C_a}$ definirono una relazione, funzione del numero di Shields.

$$C_a = 0{,}015\frac{d_{50}}{a}\left(\frac{\Phi - \Phi_{cr}}{\Phi_{cr}}\right)^{1{,}5} D_*^{-0{,}3}$$

con $$D_* = d_{50}\left(\frac{g\Delta}{\nu^2}\right)^{1/3}$$