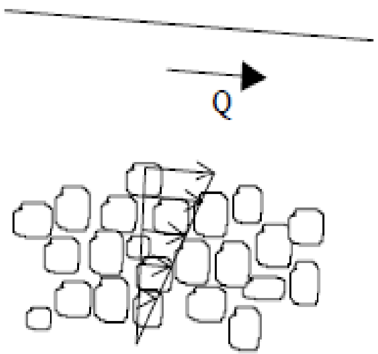
TRASPORTO SOLIDO AL FONDO

Approccio alla du Boys

"Strato limite" di solido in moto

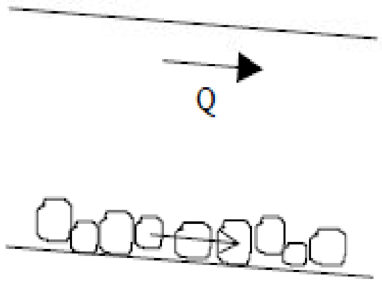
Trascinato dagli sforzi tangenziali, uno spessore più o meno profondo di particelle solide viene messo in movimento; all'aumentare della profondità gli strati di solido sono caratterizzati da velocità progressivamente decrescenti.



Approccio alla Meyer Peter – Muller

Moto superficiale

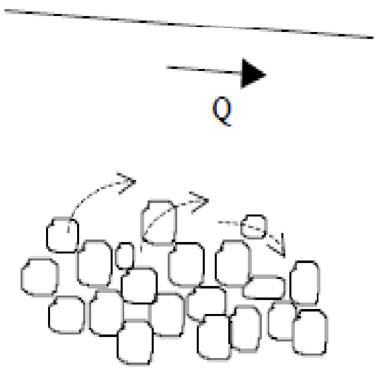
Solo uno strato superficiale di solido è considerato in movimento; le particelle rotolano / strisciano sulle sottostanti, ferme.



Approccio alla Einstein

"Saltelli"

Il moto delle particelle non è schematizzato come fenomeno continuo, bensì come successione di "salti" finiti delle particelle superficiali, seguiti da tempi di riposo.



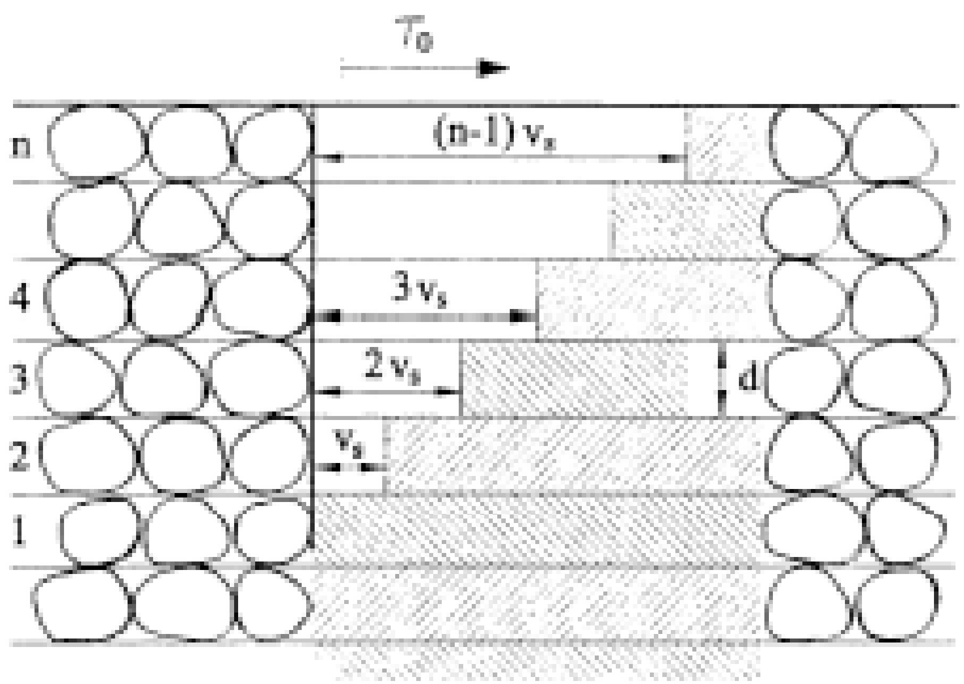
Teoria di du Boys (1879)

La teoria di du Boys è considerata la **prima teoria razionale del trasporto solido al fondo** e ipotizza che il trasporto al fondo si svolga per strati sovrapposti di spessore **d** che si muovono a causa dello sforzo tangenziale esercitato sul fondo dalla corrente.

Il primo strato mette in movimento lo strato successivo attraverso uno sforzo di attrito che è proporzionale al peso dello strato stesso, per mezzo del coefficiente di attrito **f = tan** β che bilancia lo sforzo tangenziale τ_0

$$\tau_0 = \gamma h i$$

Poiché negli strati successivi il peso del materiale sovrastante cresce, aumenta anche lo sforzo di attrito tra strato e strato e di conseguenza diminuisce la velocità di spostamento degli strati via via sottostanti.



du Boys ipotizzò che la velocità degli strati diminuisca linearmente fino ad annullarsi quando lo sforzo tra gli strati raggiunge la condizione di soglia τ_c.

Si assumano strati di ugual spessore d e siano (n - 1) gli strati in movimento: lo strato numero 1 è il primo strato immobile, quello cioè al di sopra del quale lo sforzo di attrito eguaglia il valore critico, mentre lo strato n è quello superiore.

Ne consegue un andamento della velocità degli strati di tipo lineare con valore massimo in corrispondenza dello strato superiore e pari a **$(n-1)V_s$** e valore nullo in corrispondenza dello strato immobile.

Ciò determina che lo sforzo in corrispondenza dello strato immobile τ_c e quello in superficie τ_0 sono rispettivamente pari a:

$$\tau_c = f\left(\gamma_s - \gamma\right)d \qquad\qquad \tau_0 = f\left(\gamma_s - \gamma\right)nd$$

da cui che:

$$n = \frac{\tau_0}{\tau_c}$$

È possibile quindi definire la portata solida volumetrica per unità di larghezza di alveo **q_s** ($m^3 s^{-1} m^{-1}$) ovvero quella ponderale **g_s** ($kg\ s^{-1} m^{-1}$) :

$$q_s = \Omega V_m = nd\,\frac{(n-1)V_s}{2} \qquad g_s = \gamma_s q_s = \gamma_s nd\,\frac{(n-1)V_s}{2}$$

da cui che:

$$g_s = \gamma_s \frac{\tau}{\tau_c} d\,\frac{\left(\frac{\tau}{\tau_c}-1\right)V_s}{2} = \gamma_s \frac{d * V_s}{2\tau_c^2}\tau(\tau-\tau_c)$$

La quantità $\psi = \frac{d * V_s}{2\tau_c^2}$ è detto **coefficiente caratteristico del materiale** ($m^6 kg^{-2} s^{-1}$) ⇒ $g_s = \gamma_s \psi \tau(\tau-\tau_c)$

Schoklitsch (1914)

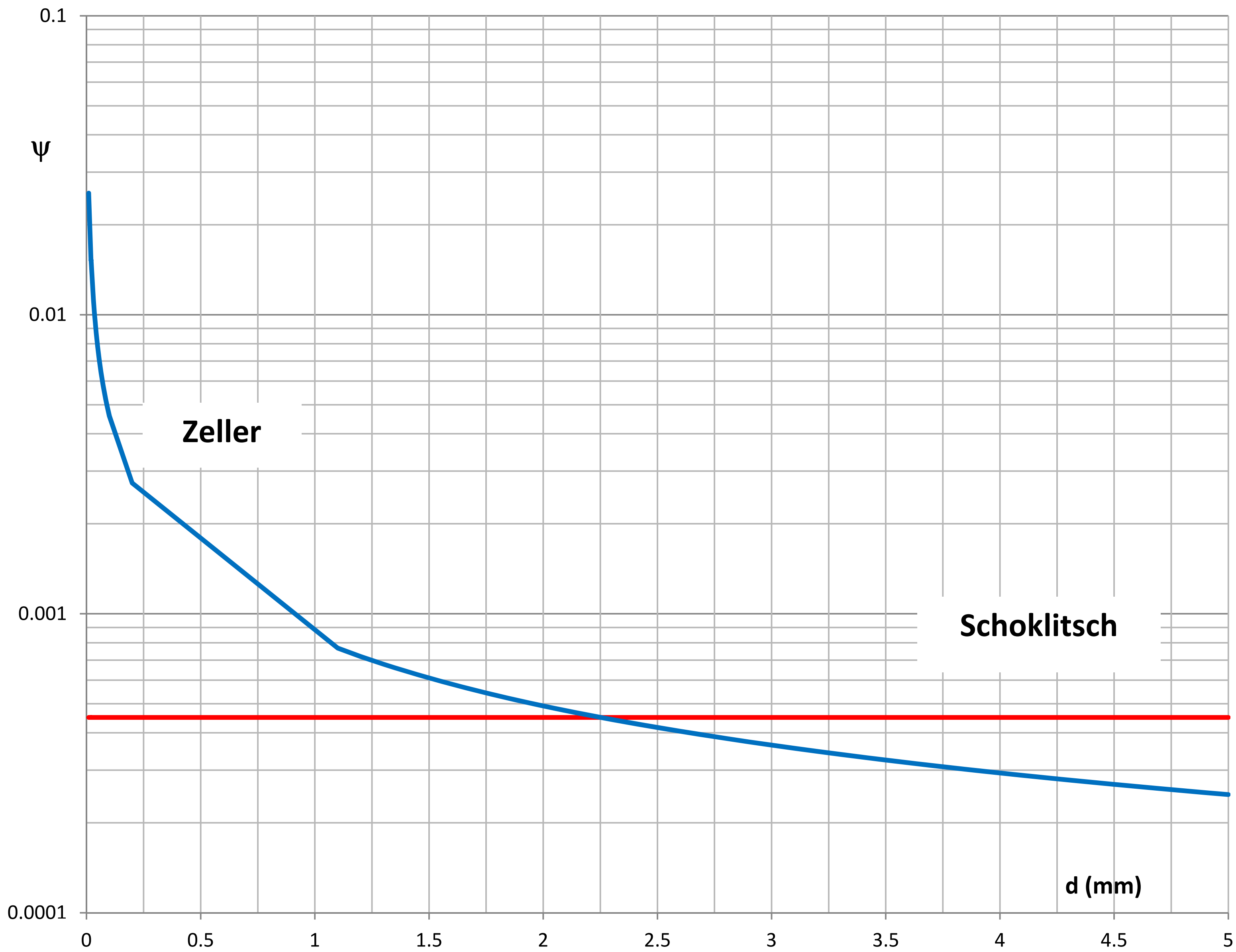
[γ_s (kg m^{-3})]

$$\psi = \frac{d * V_s}{2\tau_c^2} = \frac{0{,}54}{(\gamma_s - \gamma)}$$

Zeller (1963)

[γ_s (kg m^{-3}) - d (mm)]

$$\psi = \frac{d * V_s}{2\tau_c^2} = \frac{1{,}8143}{\gamma_s d^{0{,}7453}}$$



0.1
ψ
0.01
Zeller
0.001
Schoklitsch
d (mm)
0.0001
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

Una conferma successiva all'approccio alla du Boys è in Donat (1924), laddove egli ipotizza che la portata solida ponderale è funzione della tensione di trascinamento, mediante sviluppo in serie arrestato al 2° ordine:

$$g_s = k_1 + k_2\tau + k_3\tau^2$$

Dalle condizioni al contorno si ha che

$$\tau = 0 \Rightarrow g_s = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0$$

$$\tau = \tau_c \Rightarrow g_s = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -k_3\tau_c$$

per cui si ottiene

$$g_s = \gamma_s \psi \tau(\tau - \tau_c) = k_3\tau(\tau - \tau_c)$$

Quindi

$$k_3 = \gamma_s \psi = \gamma_s \frac{d * V_s}{2\tau_c^2}$$

Meyer Peter and Muller (1948)

La formula, di derivazione sperimentale, è stata ricavata dall'analisi sulla base di un ampio numero di prove eseguite presso il laboratorio del Politecnico di Zurigo, per cui essa è anche chiamata formula dell'E.T.H. o degli svizzeri.

$$\frac{\gamma R J}{d}\left(\frac{k}{k_g}\right) = 0{,}047\left(\gamma_s - \gamma\right) + 0{,}25\rho^{1/3}\frac{q_s^{2/3}}{d}$$

ove **k** e **k_g** sono i coefficienti di Strickler relativi al complesso delle resistenze al moto della corrente e alla sola resistenza delle particelle solide (***grain resistance***).

Si osserva che, in caso di fondo piano, **k** = **k_g** mentre in presenza di forme di fondo **k/k_g** < 1 e secondo Graf addirittura pari a 0,5 nel caso di contributo prevalente delle bedforms.

Si può quindi introdurre la portata solida volumetrica adimensionalizzata Φ

$$\Phi = \frac{q_s}{g^{1/2} d^{3/2} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right)^{1/2}} = \frac{q_s}{g^{1/2} d^{3/2} \Delta^{1/2}}$$

che consente di riscrivere la formula di Meyer-Peter e Muller come:

$$\Phi = 8 \left[\left(\frac{k}{k_g} \right)^{3/2} Y - 0,047 \right]^{3/2}$$

ove Y è il numero di Shields.

In caso di fondo piano (**k** = $\mathbf{k_g}$), assumendo Y_c=0,047

$$\Phi = 8 \left[Y - Y_c \right]^{3/2}$$

Altre formule

$$\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{g \Delta d^3}}$$

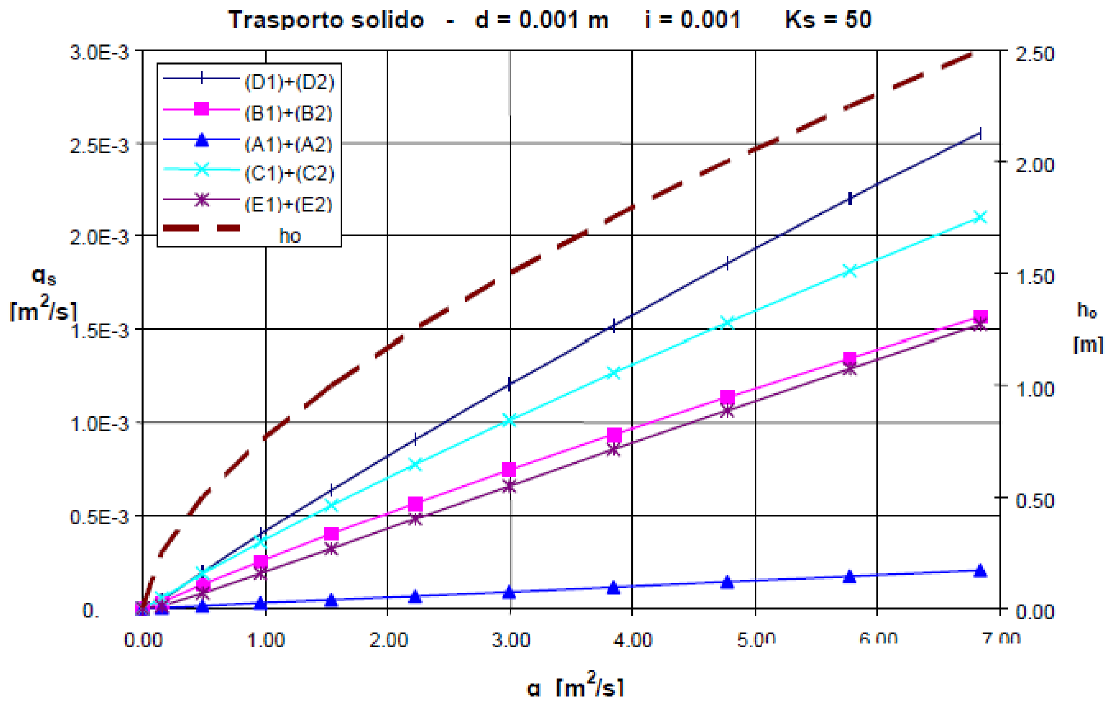
Schocklitsch (1962)	$q_s = \frac{2.5}{\rho_s / \rho} i^{1.5} \left(q - q_c \right)$	(A1)
Bathurst *et al.* (1987) (Meyer-Peter e Müller modificato)	$\Phi = 8 \left(\phi^* - \phi_c^o \right)^{1.5}$ $\phi^* = \frac{\rho u^{*2}}{\gamma \Delta d \cos\theta \left(\tan\beta - \tan\theta \right)}$	(B1)
Suszka (1991)	$\Phi = 10.4\, \phi^{3/2} \left(1 - \frac{\phi_c^o}{\phi} \right)^{5/2}$	(C1)
Meyer-Peter e Müller (1948)	$\Phi = 13.3 \left(\phi - \phi_c \right)^{1.5}$	(D1)
Pezzoli (1979)	$q_s = d \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{2}{3} \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/6} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_c}} - 1 \right)^{5/3}$ $\tau = (\rho_s - \rho) g\, d\, \phi$	(E1)

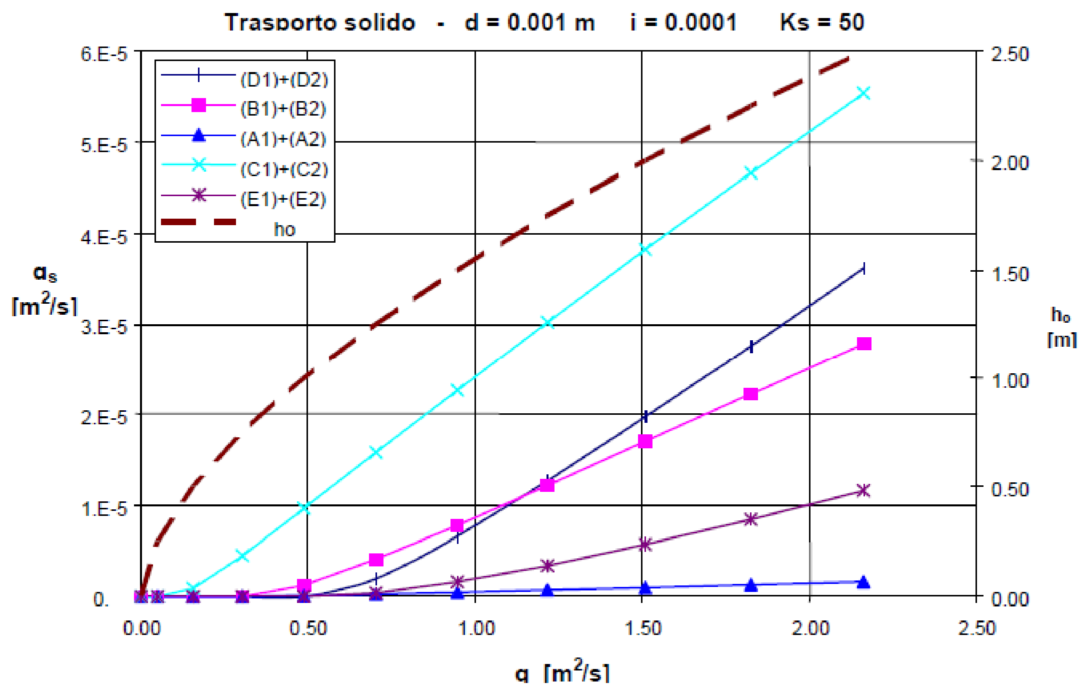
Una formula di trasporto deve comunque essere sempre associata ad una stima delle condizioni di incipiente movimento, essendo questa ultima stata misurata negli esperimenti di laboratorio dai quali le formule sono state derivate.
E' allora chiaro che all'inevitabile dispersione dei risultati relativi alle formule di trasporto si somma la dispersione dei risultati per l'incipiente movimento.

Per questa ragione, benché la scelta della formula di incipiente movimento da abbinare ad una formula per il trasporto sia in linea di principio del tutto libera, è opportuno, quando possibile, utilizzare formule fra loro omogenee dal punto di vista concettuale e della fonte, al fine di minimizzare la dispersione del risultato.

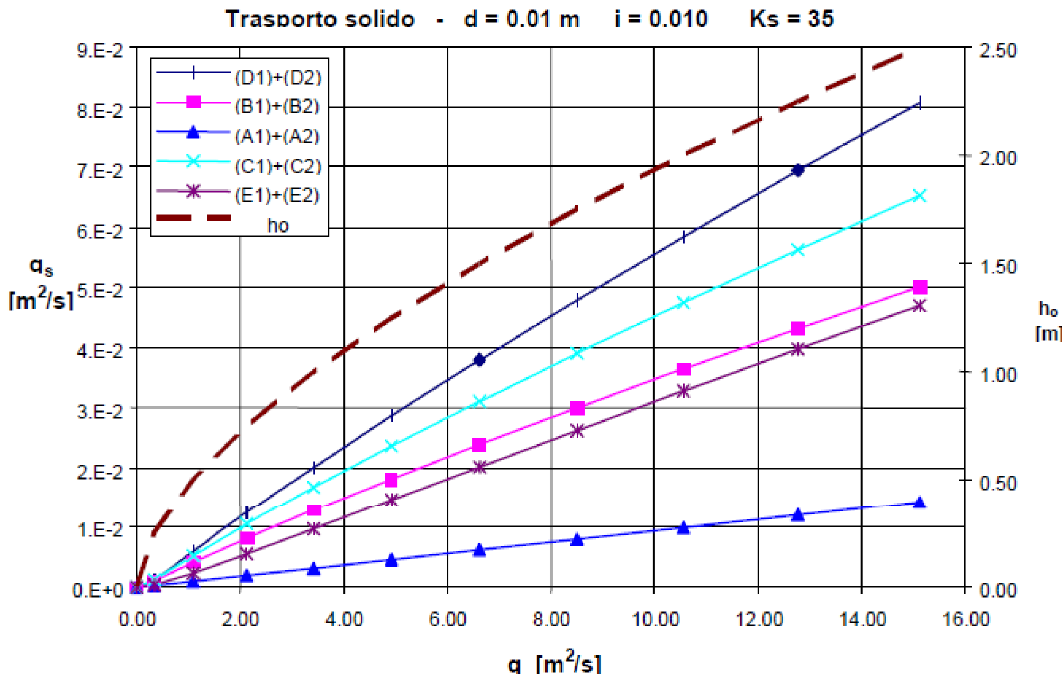
Schocklitsch	$\rightarrow$	$\dfrac{q_c}{\sqrt{gd^3}} = 0.15\, i^{-1.12}$	(A2)
Bathurst *et al.*	$\rightarrow$	$\phi_c^o = 0.047$	(B2)
Suszka	$\rightarrow$	$\phi_c^o = 0.0851\left(\dfrac{h}{d}\right)^{-0.266}$	(C2)
Meyer-Peter e Müller, Pezzoli	$\rightarrow$	$\phi_c^o = 0.06\left(1+0.67\sqrt{\dfrac{d}{h}}\right)$ $\phi_c = \phi_c^o \cos\theta\left(1-\dfrac{\tan\theta}{\tan\beta}\right)$	(D2) , (E2)

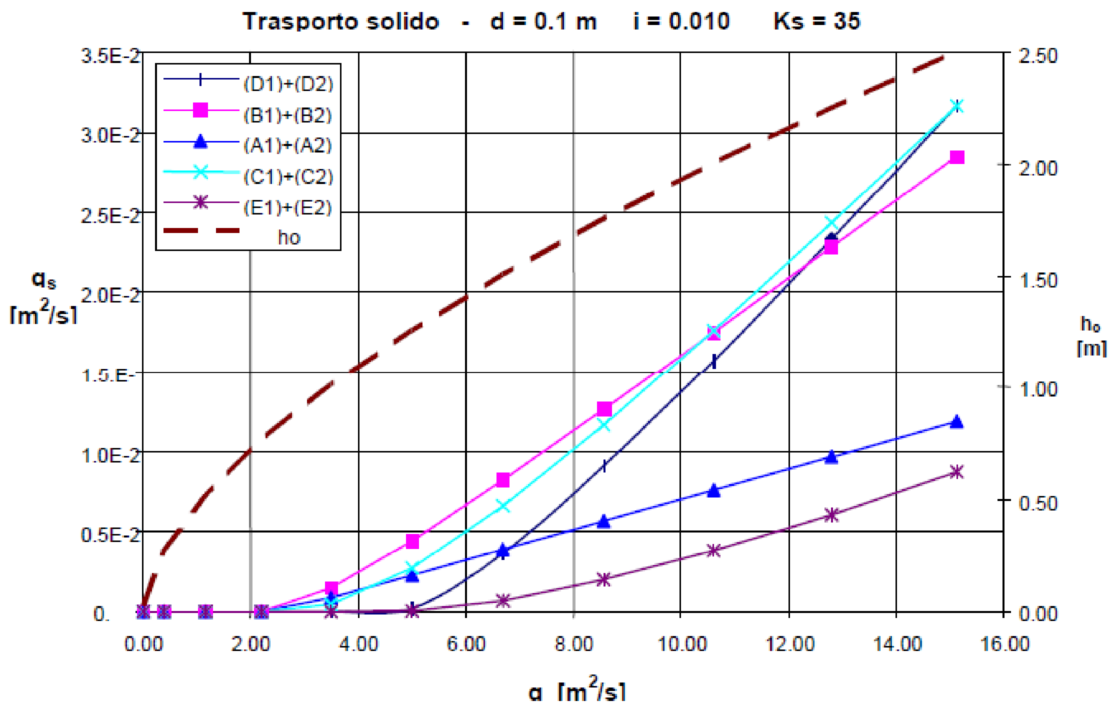
Confronto tra formule in canali con pendenza diversa



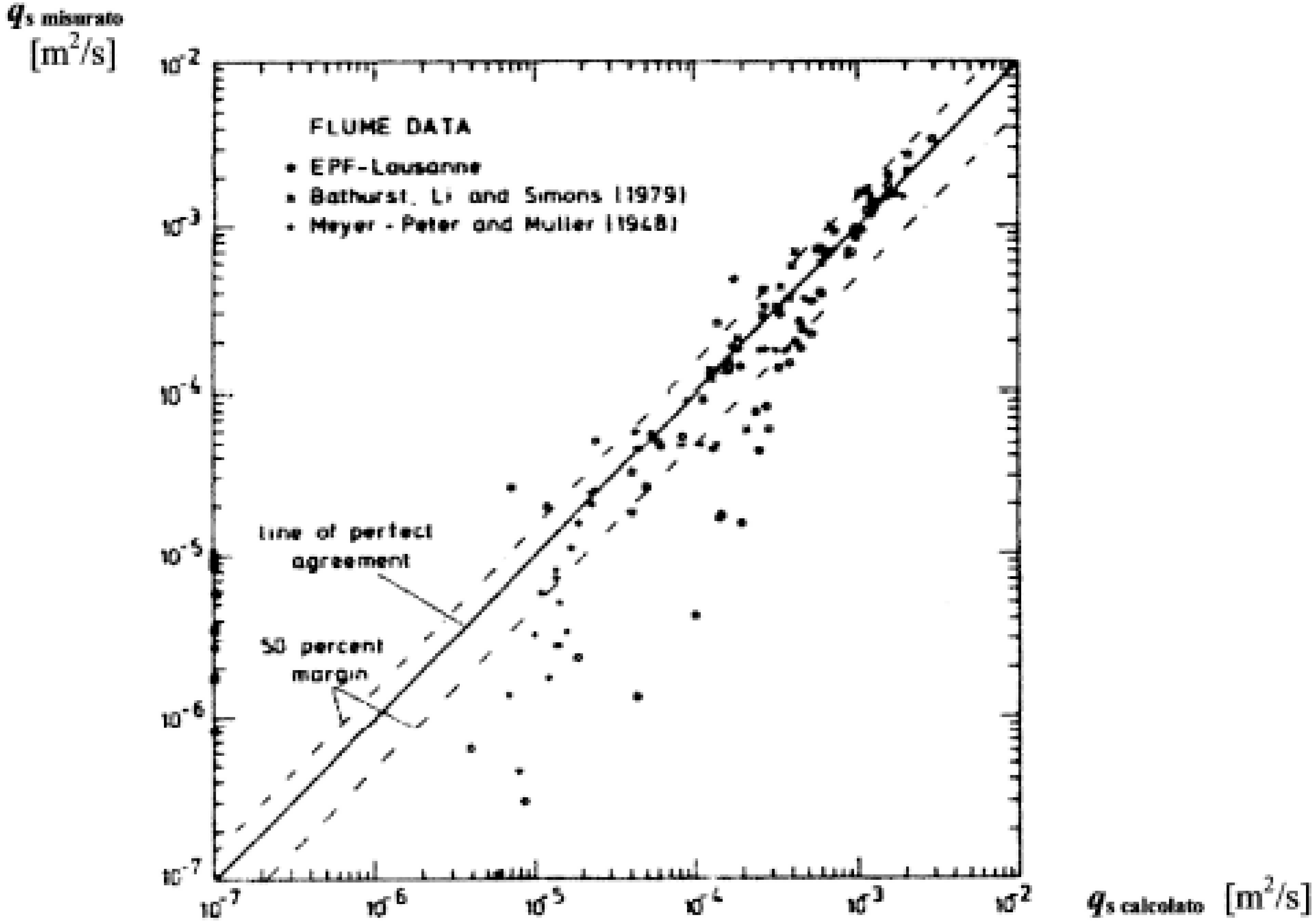


Confronto tra formule in canali con granulometria diversa

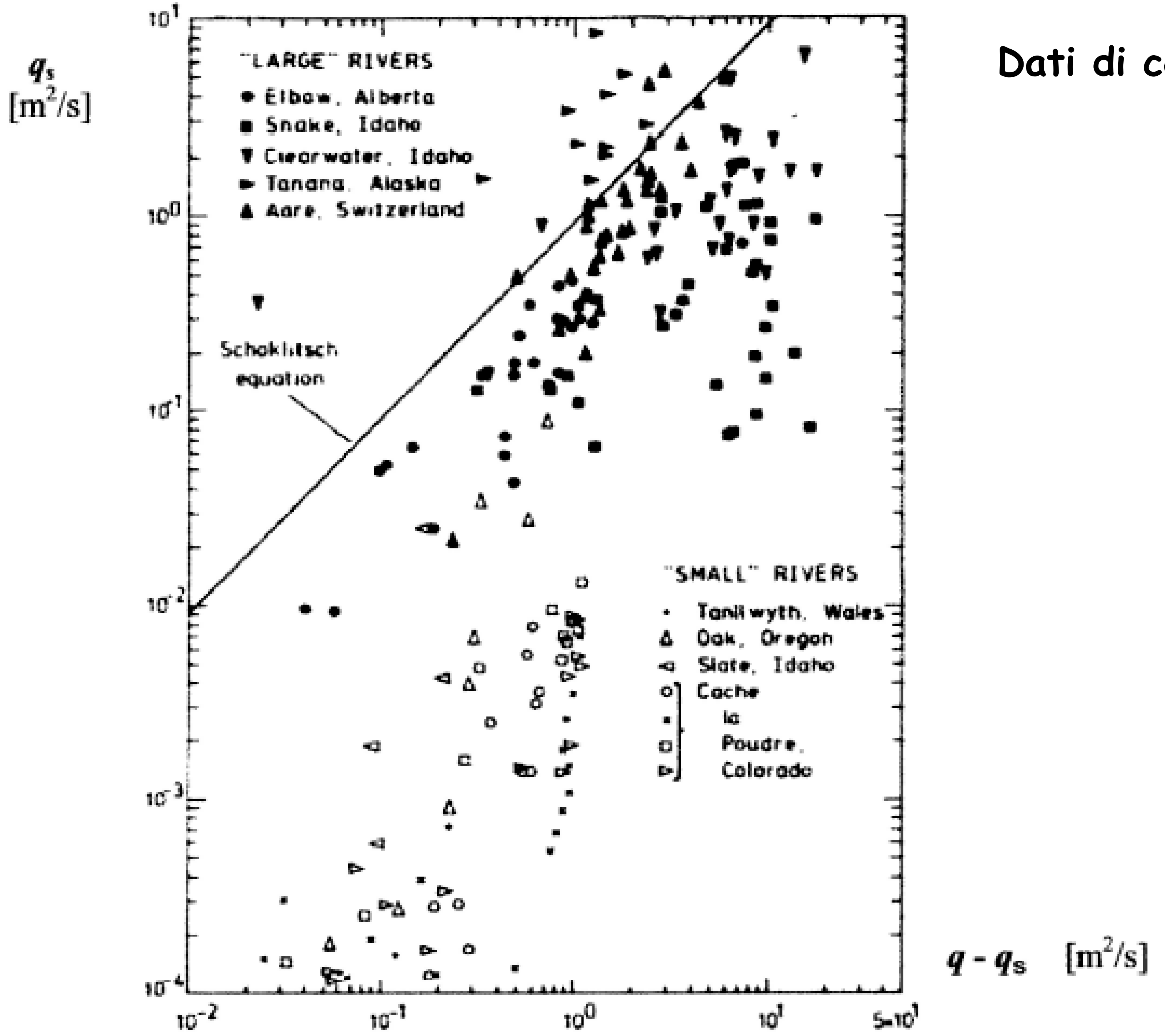




Dati di Laboratorio



Dati di campo



La stima del trasporto solido di fondo quindi deve sempre tenere in conto che:

- i risultati devono essere valutati con estrema cautela e con la consapevolezza che, nel migliore dei casi, si può arrivare alla stima degli ordini di grandezza connessi al fenomeno e non certo a valori precisi;
- i modelli di calcolo devono necessariamente essere calibrati ed adattati ai valori di campo relativi al tratto fluviale e al bacino di interesse o, al limite, a situazioni confrontabili nelle vicinanze.

Il modello di calcolo da adottare va scelto sulla base:

1) dei dati storici relativi all'evoluzione planimetrica e altimetrica dell'alveo;
2) delle caratteristiche dei sedimenti;
3) dei volumi solidi trasportati.

I principali elementi di scelta e/o taratura sono:

a) la granulometria dei sedimenti, le caratteristiche delle sezioni trasversali, il coefficiente di resistenza;
b) le formule per la valutazione della soglia di incipiente movimento.

Teoria di Einstein (1879)

L'impostazione concettuale del trasporto al fondo è Hans Albert Einstein e risale al 1949 nell'articolo "Formulas for the transportation of bed load", pubblicato sulla rivista Transactions of American Society of Civil Engineers.

La teoria si basa su due osservazioni:

1) Non esiste una condizione netta di inizio del moto;
2) Una particella si mobilita se la portanza supera il suo peso immerso della particella, per cui occorre considerare le velocità locali e non quelle medie

Ne consegue che essendo la condizioni di moto solido strettamente legate alle fluttuazioni di velocità delle particelle è possibile ritenere che l'inizio e la fine del moto possano essere espressi in termini probabilistici.

IPOTESI DI BASE

- le particelle si muovono su un letto solido di particelle dello stesso tipo
- ogni particella si muove a salti intervallati da periodi di stasi
- il salto medio di ogni particella è sempre lo stesso ed è pari a L, pur se cambiano le condizioni idrodinamiche o la composizione del letto. Il trasporto quindi dipende solo dall'intervallo medio di tempo tra due salti.
- il miscuglio di materiale è completamente caratterizzato da un diametro **d** e un peso specifico γ_s

Ipotizzando che la superficie dell'alveo sia suddivisa in strisce di larghezza unitaria e lunghezza **L,** il numero di particelle che caratterizzano una striscia è

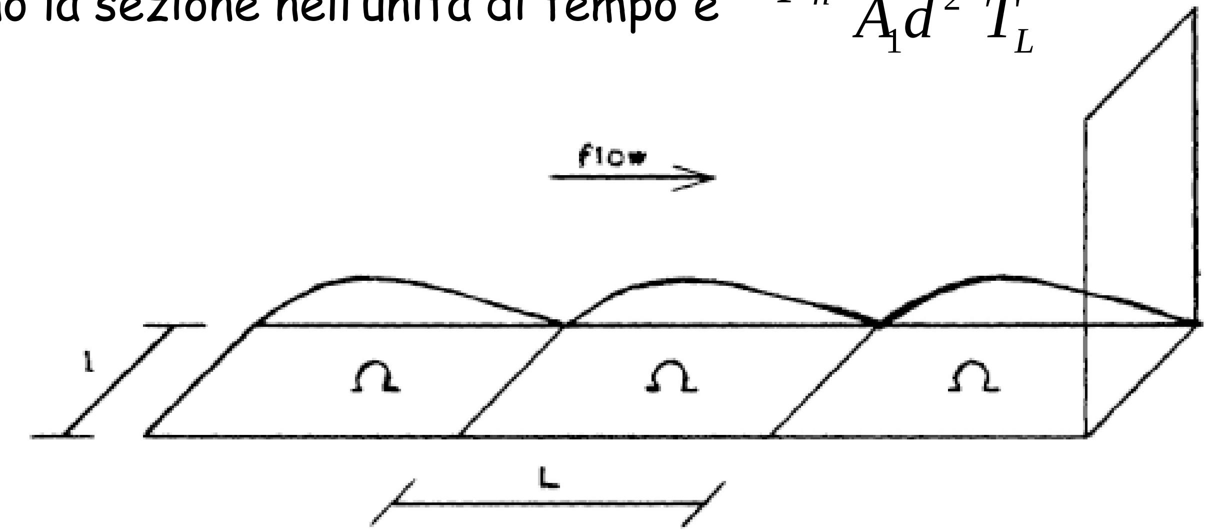
$$\frac{1*L}{A_1 d^2}$$

ove A_1 è un fattore di forma e $A_1\,d^2$ l'area della sezione retta della particella.

Sia $\mathbf{p_n}$ la probabilità media che una singola particella ha di compiere **n** salti in un tempo $\mathbf{T_L}$ sufficientemente lungo se confrontato con la durata del salto.

Quindi il numero probabile medio di particelle in moto da ogni striscia sarà

$p_n \frac{1*L}{A_1 d^2}$ mentre il numero di particelle che attraversano la sezione nell'unità di tempo è $p_n \frac{1*L}{A_1 d^2} \frac{1}{T_L}$



Quindi la portata volumetrica è

$$q_s = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{1 * L}{A_1 d^2} \frac{1}{T_L} \left(A_2 d^3 \right)$$

ove A_2 è un fattore di forma e $A_2\, d^3$ il volume della particella.

In accordo con Einstein

1) La lunghezza del salto è proporzionale al diametro della particella

$$\mathbf{L = \alpha_L d}$$

2) Il tempo T_L è proporzionale al "*time of grain*", cioè a quello che la particella impiega a sedimentare da un'altezza pari al suo diametro

$$\mathbf{T_L = \alpha_t\, d/w}$$

ove α_t è un coefficiente di proporzionalità e ***w*** la velocità di sedimentazione per il quale vale la relazione (Rubey):

$$w = \alpha_w \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma) d}{\rho}} \quad \text{con } \alpha_w = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36 \mu^2 g}{d^3 \gamma (\gamma_s - \gamma)}} - \sqrt{\frac{36 \mu^2 g}{d^3 \gamma (\gamma_s - \gamma)}}$$

Ne consegue quindi che

$$T_L = \frac{\alpha_t}{\alpha_w}\sqrt{\frac{\rho d}{(\gamma_s - \gamma)}}$$

e quindi

$$q_s = \frac{A_2 d}{A_1}\alpha_L d\,\frac{\alpha_w}{\alpha_t}\sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma)}{\rho d}}\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

che potrebbe essere riscritta come segue, sapendo che $\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{g\Delta d^3}}$

$$\left(\frac{A_1\alpha_t}{A_2\alpha_L\alpha_w}\right)\frac{q_s}{\sqrt{g\Delta d^3}} = A^*\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

QUINDI

$$\Phi = \frac{1}{A^*}\sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

Se si ipotizza che i distacchi siano statisticamente indipendenti, la probabilità $\mathbf{p_n}$ che la particella si distacchi n volte è $\mathbf{p_1}^n$ ove $\mathbf{p_1}$ la probabilità si distacchi almeno una volta nel tempo $\mathbf{T_L}$

$$\sum_{n=1}^{n} p_n = \sum_{n=1}^{n} p_1^n = \frac{p_1}{1-p_1}$$

che conduce a $$\Phi = \frac{1}{A^*}\frac{p_1}{1-p_1}$$

Ma $\mathbf{p_1}$ può anche interpretarsi come la probabilità che la forza media di sostentamento eguagli o superi in quel punto il peso della particella in acqua, cioè

$$\rho u^2 A_4 d^2 \geq (\gamma_s - \gamma) A_2 d^3$$

in cui la velocità **u** può interpretarsi come $$u = 11{,}6\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = 11{,}6\sqrt{gRi}$$

in quanto esso corrisponde alla velocità all'estremo dello strato limite laminare in parete liscia ovvero alla velocità a distanza **d** dalla parete se è scabra con **d** che misura la scabrezza media

Per cui

$$p_1 = F\left(\frac{(\gamma_s - \gamma)A_2 d^3}{\rho u^2 A_4 d^2}\right) = F\left(\frac{A_2}{135 A_4}\frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\gamma R i}\right) = F\left(B^* \Psi\right)$$

ove $$\Psi = \frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\gamma R i}$$

In condizioni di bassa mobilità (Φ < 0,4) $\Rightarrow$ $\frac{p_1}{1 - p_1} \approx p_1$

$$p_1 = A^* \Phi = F\left(B^* \Psi\right) \quad \Rightarrow \quad 0{,}465\Phi = e^{-0{,}391\Psi}$$

In condizioni di alta mobilità (Φ che tende ad infinito)

$$\Phi = \frac{7{,}84}{\Psi}$$

Rappresentazione delle equazioni di Einstein