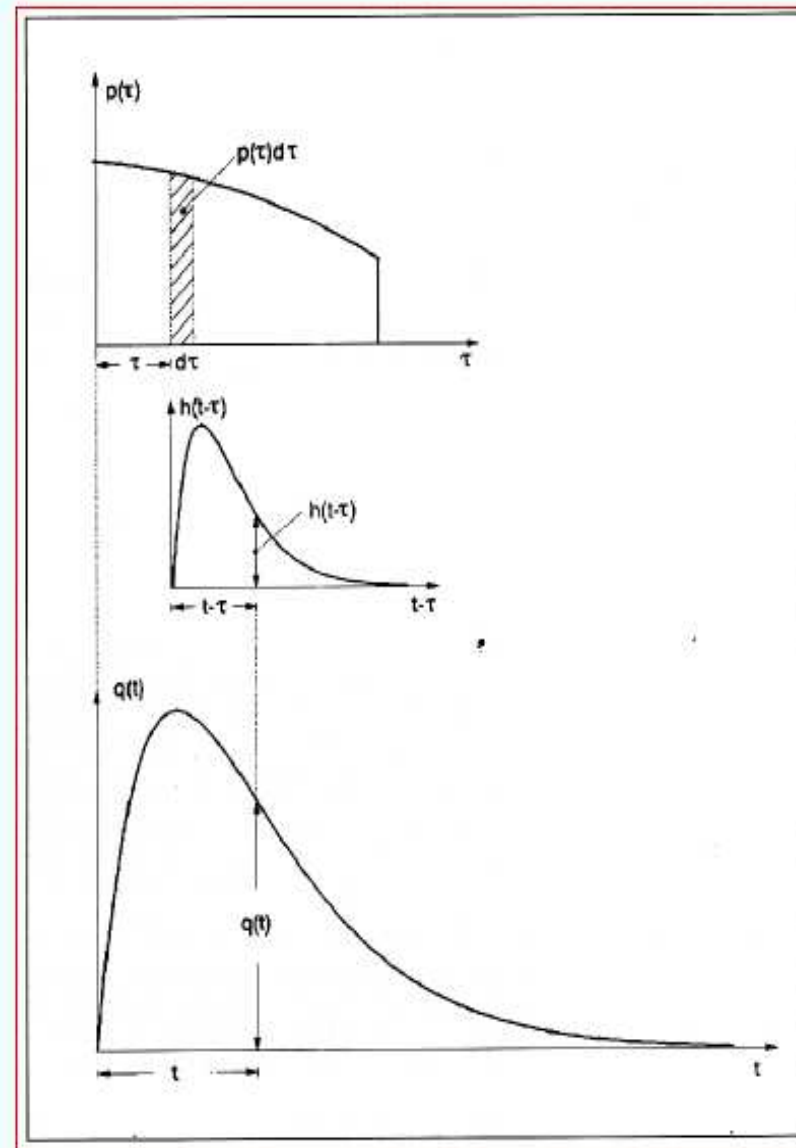


L'IDROGRAMMA UNITARIO ISTANTANEO

L'idrogramma unitario istantaneo rappresenta la **risposta** del sistema (cioè l'idrogramma di piena) conseguente ad una **precipitazione netta di volume unitario e di durata infinitesima** (e conseguentemente di intensità infinita).

Sulla base della **linearità ed invarianza**, la **risposta del sistema alla generica pioggia** assume la forma dell'**integrale di convoluzione**.

La generica pioggia, di durata finita, può essere interpretata come una successione di precipitazioni nette elementari di durata infinitesima **$d\tau$** e volume, anch'esso infinitesimo, pari a **$p(\tau)d\tau$** .



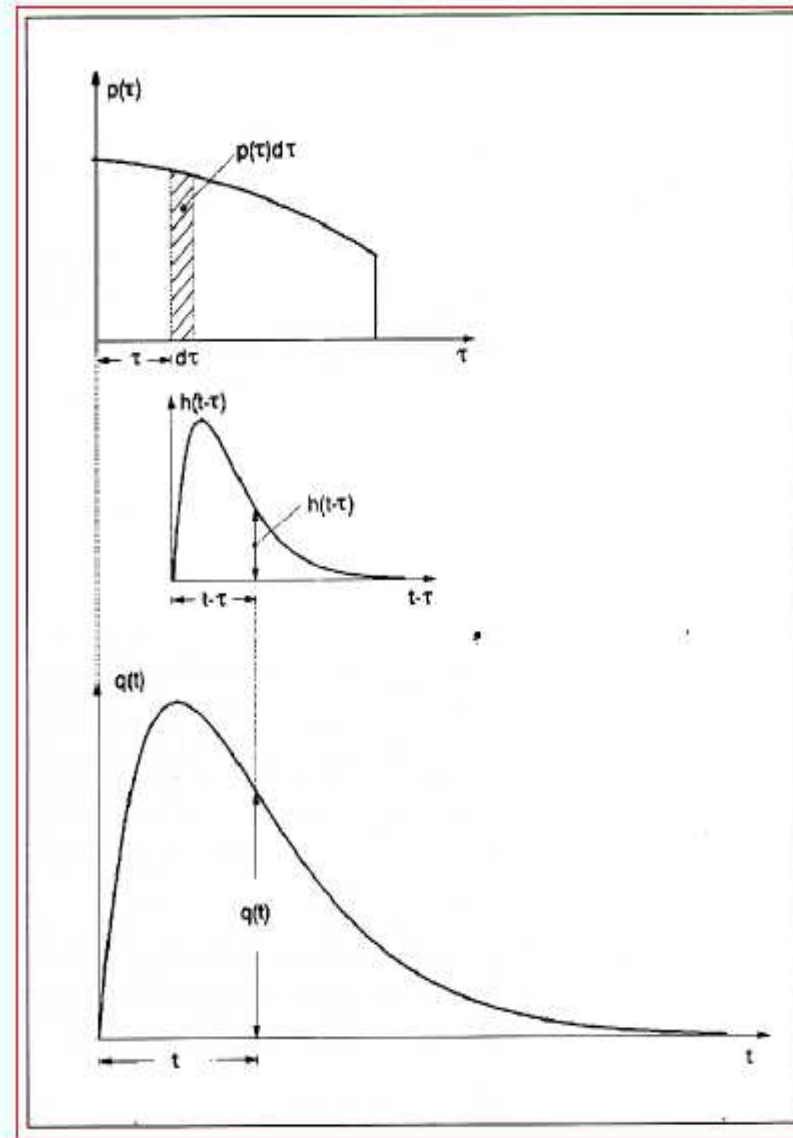
L'IDROGRAMMA UNITARIO ISTANTANEO

Si consideri l'effetto nell'istante t di una sollecitazione applicata all'istante τ ed avente le caratteristiche di una pioggia impulsiva.

Tale effetto sarà pari ad $h(t - \tau)$, dove con h si indica l'ordinata dell'**operatore idrogramma unitario istantaneo**.

Ricorrendo all'ipotesi di linearità, si verifica che la portata infinitesima $dq(t)$, dovuta alla sola pioggia dell'intervallo infinitesimo $d\tau$ compreso fra t e $t-d\tau$, il cui volume è pari a $p(\tau)d\tau$, risulta essere data da

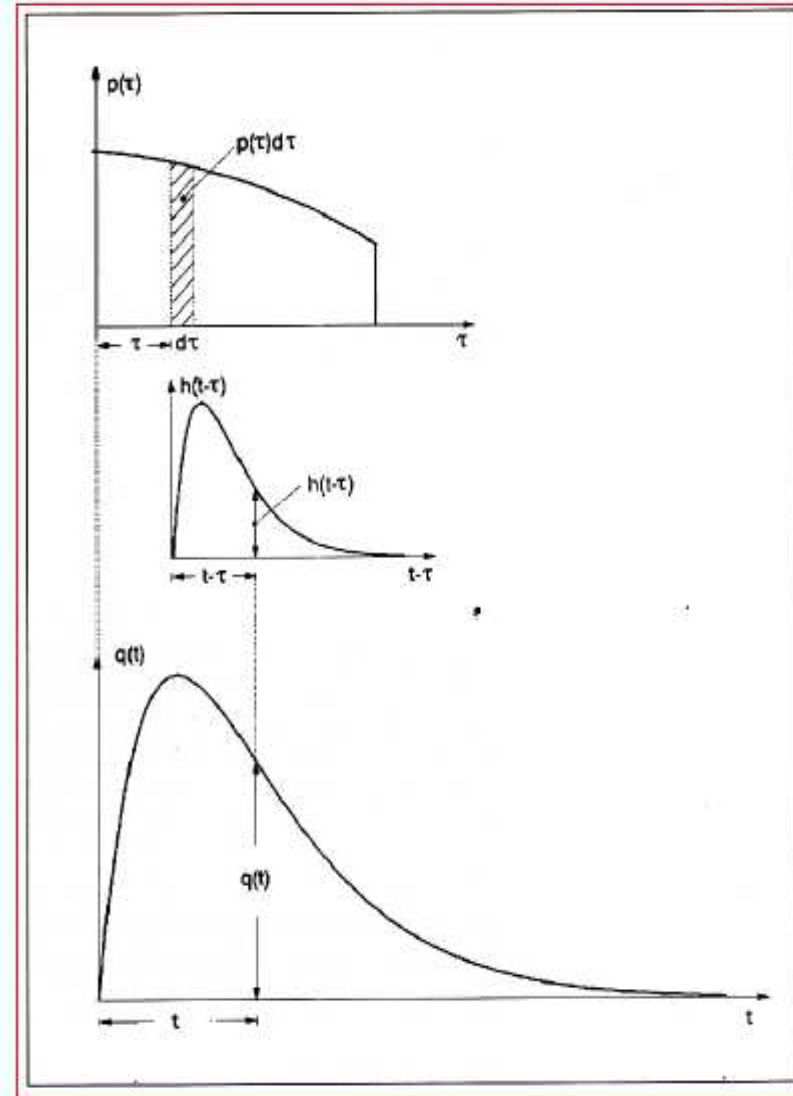
$$dq(t) = p(\tau) d\tau h(t - \tau)$$



L'IDROGRAMMA UNITARIO ISTANTANEO

La risposta del sistema al tempo t si ottiene quindi sovrapponendo gli effetti delle piogge nette che si sono verificate fra l'istante iniziale $t=0$ e l'istante t considerato, sommando cioè tutti i contributi infinitesimi $dq(t)$; si ha quindi

$$q(t) = \int_0^t dq(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau$$



Modelli parametrici lineari

Questi modelli si ottengono simulando il comportamento dei bacini idrografici con un insieme di canali e serbatoi a mezzo dei quali si attuano i fenomeni di trasferimento della massa liquida e di laminazione degli afflussi. I canali ed i serbatoi sono ipotizzati di tipo lineare, cioè tali per cui si suppone che nei primi l'onda di piena si propaghi senza deformarsi e nei secondi che il volume invasato sia legato alla portata uscente da una relazione lineare.

A seconda del modo con cui vengono combinati i due elementi suddetti (canali e serbatoi lineari) si ottengono differenti modelli parametrici, i più importanti dei quali sono

-il modello dell'invaso lineare, per il quale la risposta impulsiva è equivalente a quella di un serbatoio lineare ed è data dall'espressione:

$$h(t) = \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}}$$

-Il modello cinematico

-Il modello di Clark

MODELLO CINEMATICO

Il modello cinematico consente la derivazione di un semplice quanto efficace Idrogramma Unitario

Il **modello cinematico** schematizza il bacino idrografico come un insieme di **canali lineari**; (Il canale lineare è un semplice elemento concettuale che produce una risposta **q(t)** costituita da una semplice traslazione nel tempo - ritardo - dell'immissione **p(t)**: si ha quindi

$$q(t)=p(t-\tau),$$

dove τ rappresenta il ritardo temporale provocato dal canale.

Ciascun punto del bacino si immagina quindi connesso alla sezione di chiusura da un **canale lineare**.

MODELLO CINEMATICO

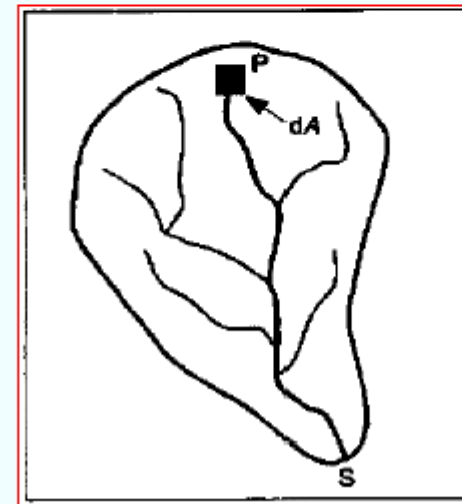
Si consideri nel generico punto **P** una porzione elementare di bacino di area **dA**.
Si indichi con τ il suo tempo di **corrivazione** (il ritardo cinematico).

La pioggia netta **i(t)**, prodottasi nel punto **P**, determinerà nella sezione di chiusura l'idrogramma (caratterizzato da portate infinitesime, poiché tale è l'area **dA** di formazione del deflusso):

$$dq(t) = i(t - \tau)dA$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la portata defluente al tempo t alla sezione di chiusura sarà data dalla somma dei contributi forniti dalle singole aree elementari, per cui

$$q(t) = \int_0^{A(t)} i(t - \tau)dA$$



MODELLO CINEMATICO

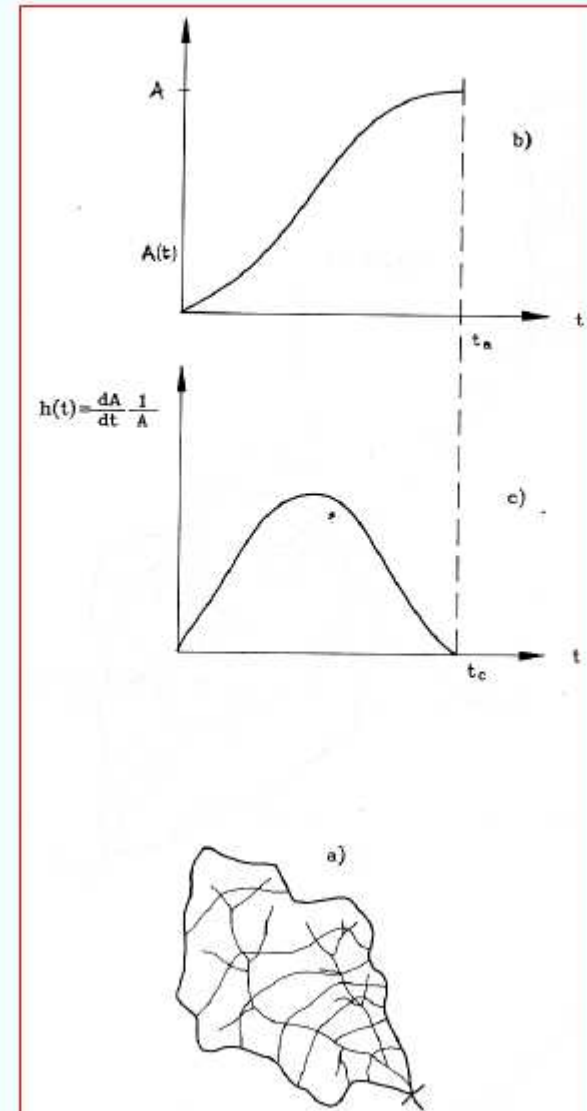
La funzione $A(t)$ rappresenta la **curva area-tempi** che ha in ascissa il tempo t ed in ordinata l'area $A(t)$ il cui tempo di corrivazione è minore o uguale a t .

La funzione $A(t)$ ha andamento monotono crescente.

La derivata dA/dt della curva area-tempi calcolata al tempo t generico, divisa per l'area totale del bacino, rappresenta lo IUH del metodo cinematico.

Infatti:

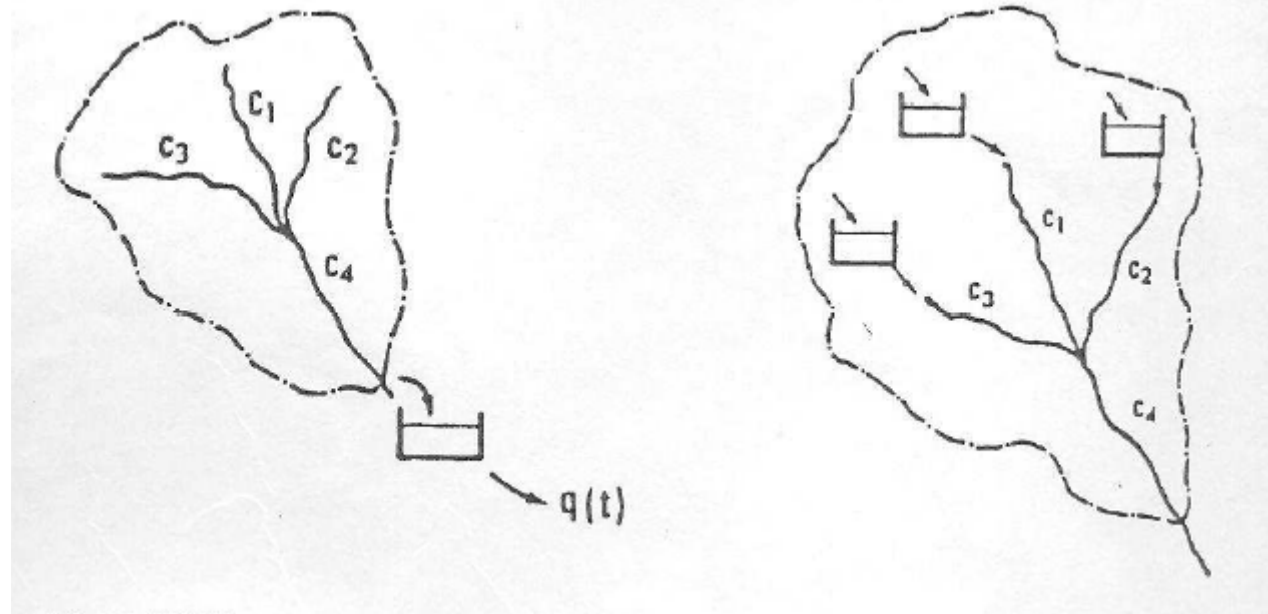
$$q(t) = \int_0^{A(t)} i(t - \tau) dA = \int_0^{A(t)} i(t - \tau) \frac{dA}{d\tau} d\tau$$
$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{A} \frac{dA(t)}{dt}$$

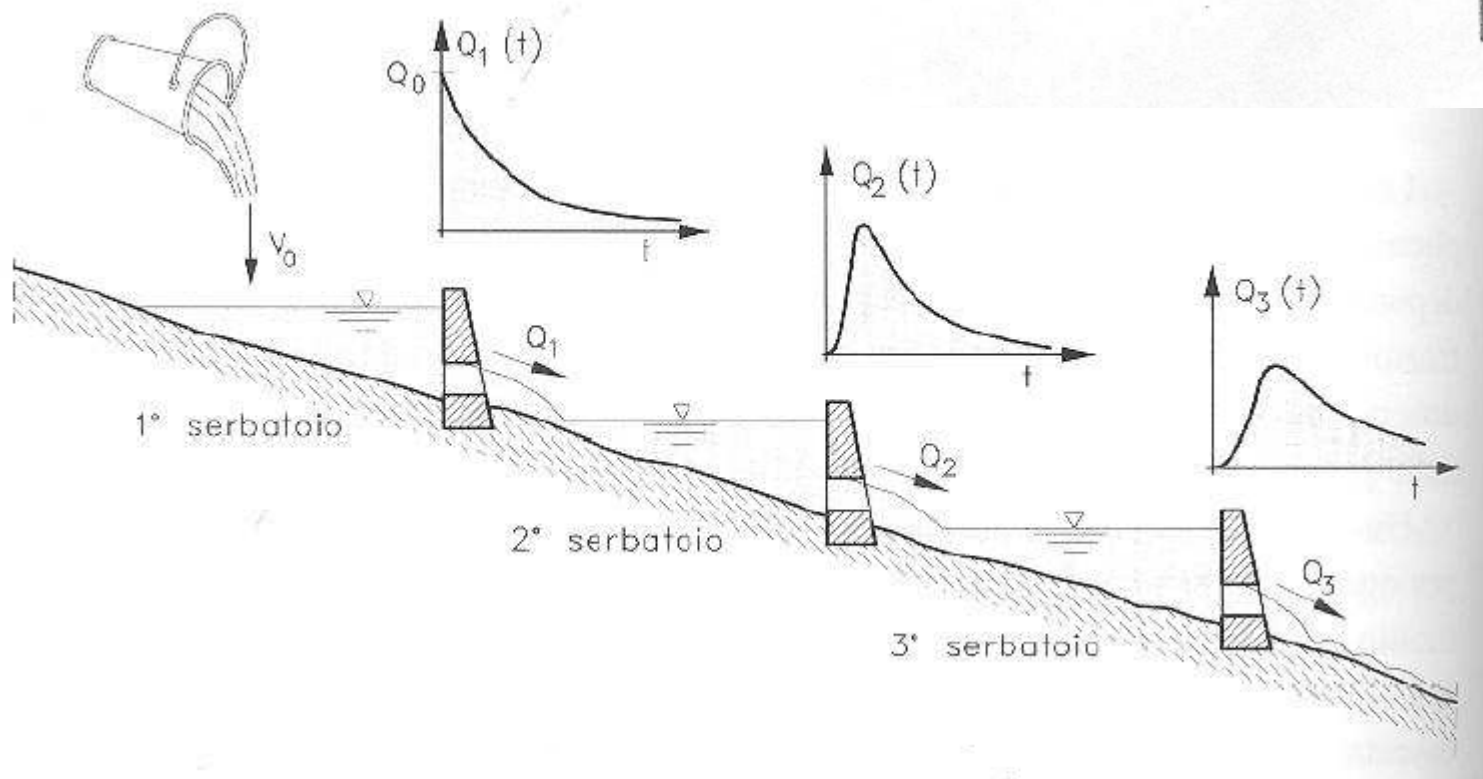
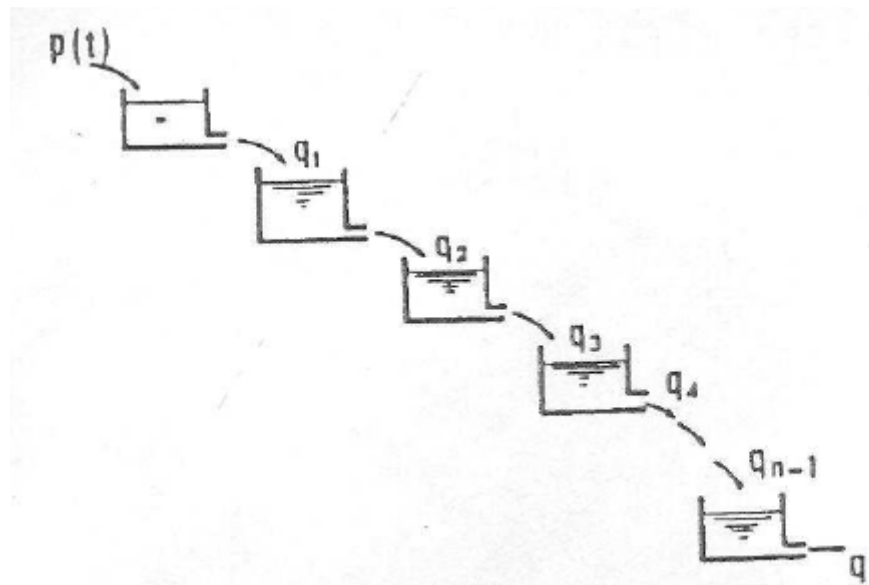


- Il modello di Clark. Questo modello simula il comportamento del bacino come un sistema di canali lineari che confluiscono in un serbatoio lineare prima di raggiungere la sezione di chiusura (Fig. 2.34). Utilizzando la regola che fornisce lo I.U.H. di un modello risultante dalla combinazione in serie di due modelli lineari si ottiene lo I.U.H. del modello di Clark:

$$h(t) = \frac{1}{K} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{K}} \frac{1}{A_T} \frac{dA(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.35)$$

Il modello di Clark, data la linearità degli elementi di cui è costituito, si può interpretare indifferentemente o come un sistema di canali che versano un serbatoio finale (definizione n° 1) oppure come un sistema di serbatoi posti su ciascun sottobacino elementare, dai quali si dipartono i singoli rami della rete di canali (definizione n. 2) (Fig. 2.35).





$$Q(t) = \frac{S}{k\Gamma(n)} \int_0^t e^{-\tau/k} \left(\frac{\tau}{k}\right)^{n-1} j(t-\tau) d\tau.$$

Lo sviluppo della teoria dell'IUH di Nash conduce a

$$Q_n = \frac{V_0}{k} \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{\Gamma(n)} \left[\frac{t}{k} \right]^{n-1}$$

Qualora si ipotizzi una precipitazione costante nel tempo, per t uguale a t_c , la portata assume valore massimo.

Ne consegue che: $\frac{dQ_n}{dt} = 0$ se $t = t_c$ da cui $t_c = (n-1)k$

Riscrivendo l'espressione di Q_n utilizzando i parametri n e t_c

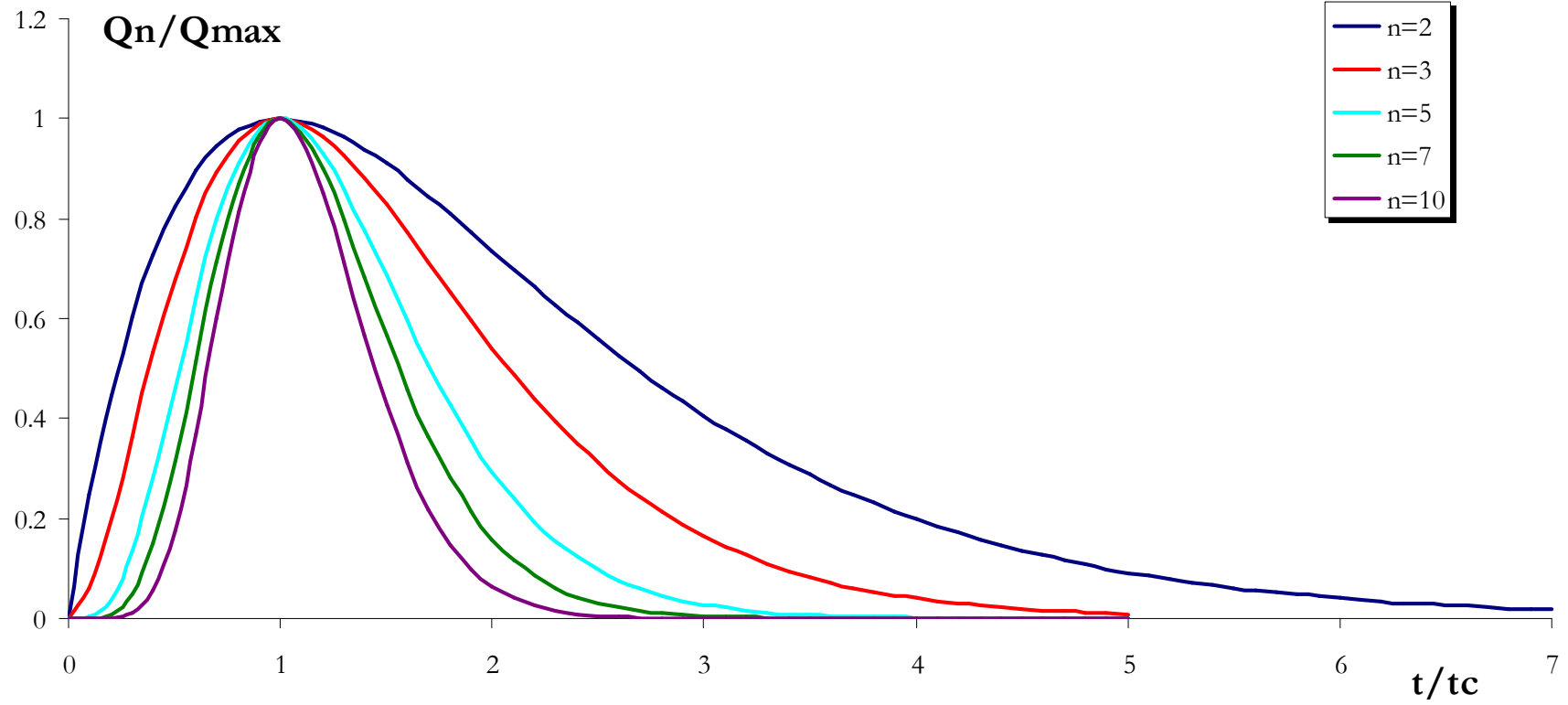
$$Q_n = \frac{V_0}{t_c} \frac{(n-1)^n}{\Gamma(n)} \left[\frac{t}{t_c} e^{-\frac{t}{t_c}} \right]^{n-1}$$

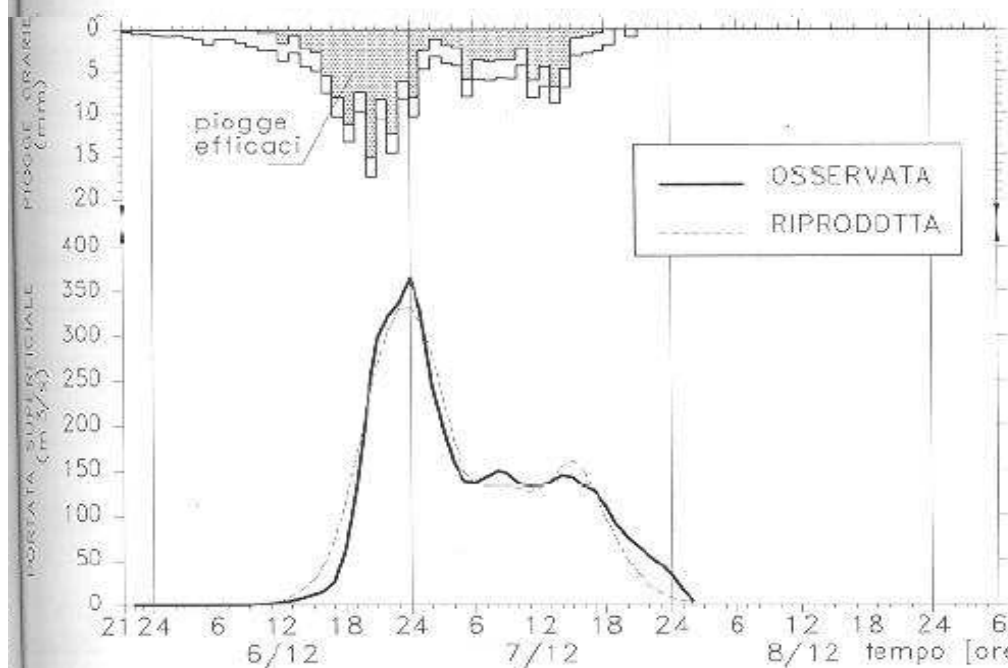
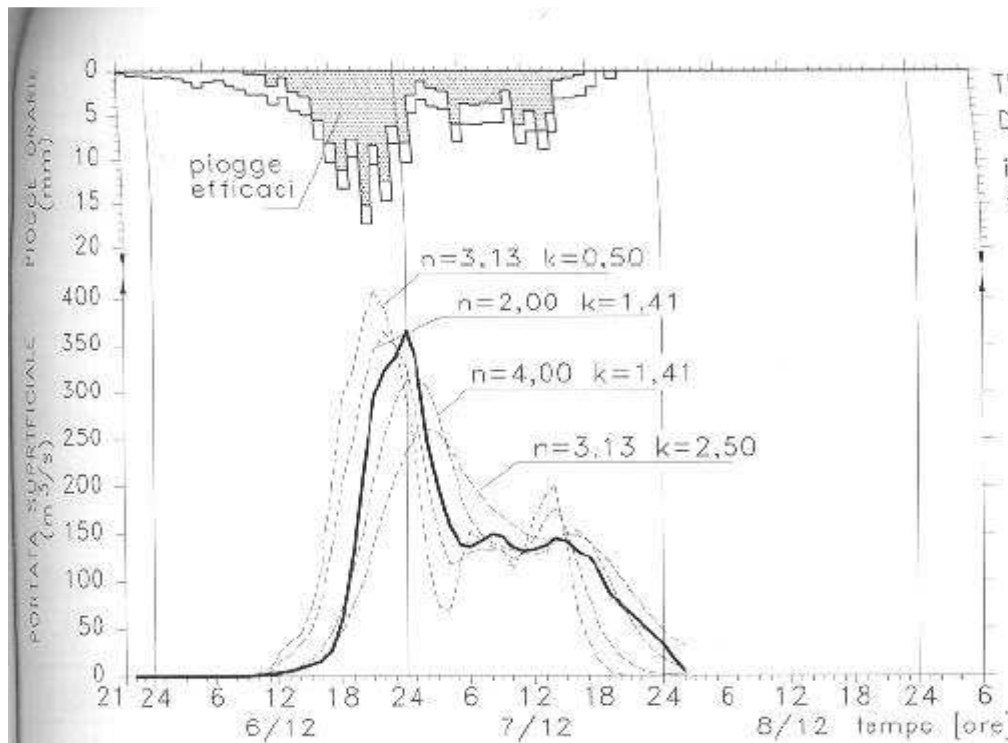
e di conseguenza $Q_{\max} = \frac{V_0}{t_c} \frac{(n-1)^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{e^{(n-1)}}$

Dalle relazioni su riportate consegue quindi

$$\frac{Q_n}{Q_{\max}} = \left[\frac{t}{t_c} e^{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)} \right]^{n-1}$$

IUH di Nash





$$Q(t) = \frac{S}{k\Gamma(n)} \int_0^t e^{-\tau/k} \left(\frac{\tau}{k}\right)^{n-1} j(t-\tau) d\tau.$$

$$Q(m\Delta t) = \frac{S}{k\Gamma(n)} \sum_{i=1}^m e^{-\frac{i\Delta t}{k}} \left(\frac{i\Delta t}{k}\right)^{n-1} j_{m-i+1} \Delta t,$$

$$GIUH = \frac{1}{k\Gamma(n)} e^{-\frac{i\Delta t}{k}} \left(\frac{i\Delta t}{k}\right)^{n-1}$$

dove:

$Q(m\Delta t)$ = portata all'istante $m\Delta t$, con m che varia da 1 a N ;

N = numero max d'intervalli temporali considerati;

Δt (h) = intervallo temporale di calcolo (generalmente posto uguale al h);

m = numero dell'intervallo di calcolo;

$\Gamma(n)$ = funzione gamma;

S (kmq) = area del bacino;

J_{m-i+1} (mm) = afflusso efficace nell'intervallo Δt ;

k, n = coefficienti caratteristici del bacino, che variano normalmente nell'intervallo 1-10;

indice r	Δt (ore)	j (mm/h)
1	0-1	5,2
2	1-2	7,4
3	2-3	12,6
4	3-4	15,8
5	4-5	10,4
6	5-6	14,6
7	6-7	8,8
8	7-8	4,2
9	8-9	2,2

$$\begin{aligned}
 i = 1, & \quad r = m - i + 1 = 3, \\
 i = 2, & \quad r = m - i + 1 = 2, \\
 i = 3, & \quad r = m - i + 1 = 1,
 \end{aligned}$$

$$hF/S = 0,03057 \cdot 12,6 = 0,38514;$$

$$hF/S = 0,05785 \cdot 7,4 = 0,42808;$$

$$hF/S = 0,07532 \cdot 5,2 = 0,39168.$$

D (mm)	n	5,2	7,4	12,6	15,8	10,4	14,6	8,8	4,2	2,2	Q (m ³ /s)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	(m ³ /s)
03057	1	0,15895	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	5,52
03715	2	0,30082	0,22619	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,30
00532	3	0,39168	0,42808	0,38514	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	41,84
00415	4	0,43759	0,55739	0,72890	0,48295	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	76,63
00645	5	0,44953	0,62272	0,94907	0,91402	0,31789	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	112,96
00422	6	0,43793	0,63971	1,06030	1,19010	0,60163	0,44627	0,00000	0,00000	0,00000	151,94
00909	7	0,41129	0,62321	1,08924	1,32959	0,78336	0,84460	0,26899	0,00000	0,00000	185,77
00232	8	0,37605	0,58530	1,06114	1,36588	0,87517	1,09971	0,50907	0,12838	0,00000	208,36
00478	9	0,33687	0,53515	0,99659	1,33064	0,89906	1,22860	0,66284	0,24297	0,06725	218,75
00710	10	0,29693	0,47939	0,91121	1,24969	0,84586	1,26214	0,74053	0,31636	0,12727	217,34
00468	11	0,25833	0,42256	0,81626	1,14262	0,82258	1,22957	0,76074	0,35343	0,16571	207,35
00476	12	0,22234	0,36763	0,71949	1,02356	0,85211	1,15478	0,74111	0,36308	0,18513	191,99
00180	13	0,18964	0,31641	0,62596	0,90222	0,67374	1,05584	0,69603	0,35371	0,19019	173,74
00087	14	0,16050	0,26987	0,53875	0,78493	0,59386	0,94582	0,63640	0,33220	0,18528	154,43
00195	15	0,13494	0,22840	0,45950	0,67557	0,51667	0,83369	0,57008	0,30374	0,17401	135,30
00089	16	0,11279	0,19203	0,38890	0,57620	0,44468	0,72532	0,50250	0,27209	0,15910	117,14
00184	17	0,09380	0,16051	0,32697	0,48767	0,37927	0,62426	0,43718	0,23983	0,14252	100,42
00140	18	0,07766	0,13349	0,27331	0,41000	0,32100	0,53244	0,37627	0,20865	0,12562	85,36
00132	19	0,06404	0,11052	0,22730	0,34272	0,26988	0,45063	0,32092	0,17958	0,10929	72,04
00102	20	0,05262	0,09113	0,18818	0,28502	0,22559	0,37887	0,27161	0,15317	0,09407	60,43
00029	21	0,04309	0,07488	0,15517	0,23597	0,18761	0,31669	0,22836	0,12963	0,08023	50,40
00671	22	0,03518	0,06132	0,12749	0,19458	0,15532	0,26337	0,19088	0,10899	0,06790	41,84
00551	23	0,02865	0,05007	0,10441	0,15987	0,12808	0,21805	0,15875	0,09110	0,05709	34,59
00448	24	0,02328	0,04077	0,08525	0,13093	0,10523	0,17980	0,13143	0,07577	0,04772	28,48
00083	25	0,01887	0,03312	0,06943	0,10691	0,08618	0,14773	0,10837	0,06273	0,03969	23,37

Il metodo richiede la conoscenza dei parametri k e n , ottenibili per tentativi, noti gli idrogrammi di piena ed i relativi ietogrammi di eventi precedenti, riferiti alla stessa sezione di chiusura.

In alternativa le due grandezze k e n possono essere stimate correlandole con grandezze geometriche o parametri morfometrici del bacino. In questo caso l'idrogramma ottenuto prende il nome di ***idrogramma sintetico***.

Diverse le correlazioni disponibili in letteratura; in questo lavoro si è utilizzata l'espressione fornita dal Rosso (1984)[1] che correla i fattori k e n con alcuni parametri morfometrici del bacino, attraverso le relazioni:

[1] Rosso R. (1984), Nash Relation to Horton Order Ratios, Water Resources Research, Vol. 20, NO. 7, Pages 914-920

$$n = 3.29 \left(\frac{R_b}{R_A} \right)^{0.78} R_l^{0.07} \qquad k = 0.7 \left[\frac{R_A}{(R_b R_l)} \right]^{0.48} \left(\frac{L}{V} \right)$$

dove:

R_b = rapporto di biforcazione del bacino;

R_A = rapporto delle aree del bacino;

R_l = rapporto delle lunghezze del bacino;

L (m) = lunghezza dell'asta principale;

V (m/s) = velocità media di propagazione dei deflussi nella rete idrografica.

La caratterizzazione morfologica del reticolo è stata effettuata applicando la metodologia proposta da **Horton-Strahler**, secondo la quale il bacino è classificato in funzione dei segmenti che sono compresi tra le varie confluenze, assegnando ad ognuno di essi un numero (ordine) che dipende dalla posizione nell'ambito del reticolo stesso. I segmenti del reticolo vengono distinti con un numero d'ordine crescente in funzione dei rami di ordine inferiore che vi confluiscono.

Tutti i segmenti che sono privi di affluenti si dicono di I ordine. Per creare un ramo di ordine II è necessaria la confluenza di almeno due rami di ordine I, per un ramo di ordine III ne occorreranno almeno due di ordine II, ecc.. In generale quindi un segmento di ordine N è dato dalla confluenza di almeno due rami di ordine N-1.

Tale metodologia prevede inoltre che vengano valutati i seguenti parametri morfometrici definiti dalle leggi di Horton:

$$\text{Rapporto di biforcazione } \mathbf{R_b} = N_u / N_{u+1}$$

$$\text{Rapporto delle lunghezze } \mathbf{R_l} = L_{u+1} / L_u$$

$$\text{Rapporto delle aree } \mathbf{R_A} = A_{u+1} / A_u$$

N_u = somma del numero totale dei segmenti di ordine u

N_{u+1} = somma del numero totale dei segmenti di ordine u+1

L_u = lunghezza media delle aste di ordine u

L_{u+1} = lunghezza media delle aste di ordine u+1

A_u = valor medio delle aree A_u drenate dai canali di ordine u

A_{u+1} = valor medio delle aree A_{u+1} drenate dai canali di ordine u+1

