CORSO DI
REGIME E PROTEZIONE DEI LITORALI

Esercitazione
Teoria di Airy

Staff Didattico: L. Damiani, M. F. Bruno, M. Molfetta, A. Saponieri, L. Pratola, M. Mali, D. Malcangio, N. Valentini

Teoria di Airy

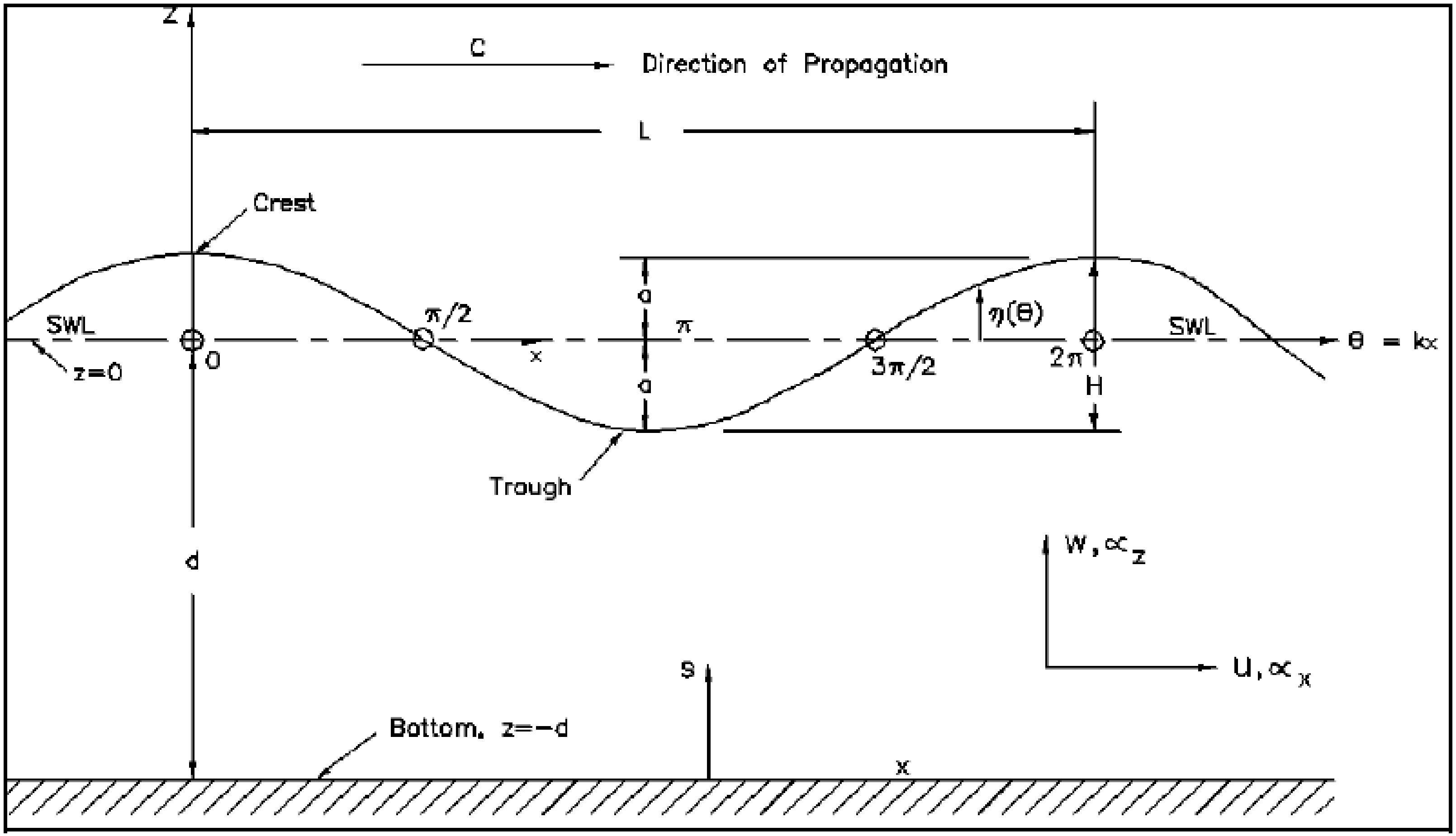


Figure II-1-1. **Definition of terms - elementary, sinusoidal, progressive wave**

FORMULE UTILI

Lunghezza d'onda

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

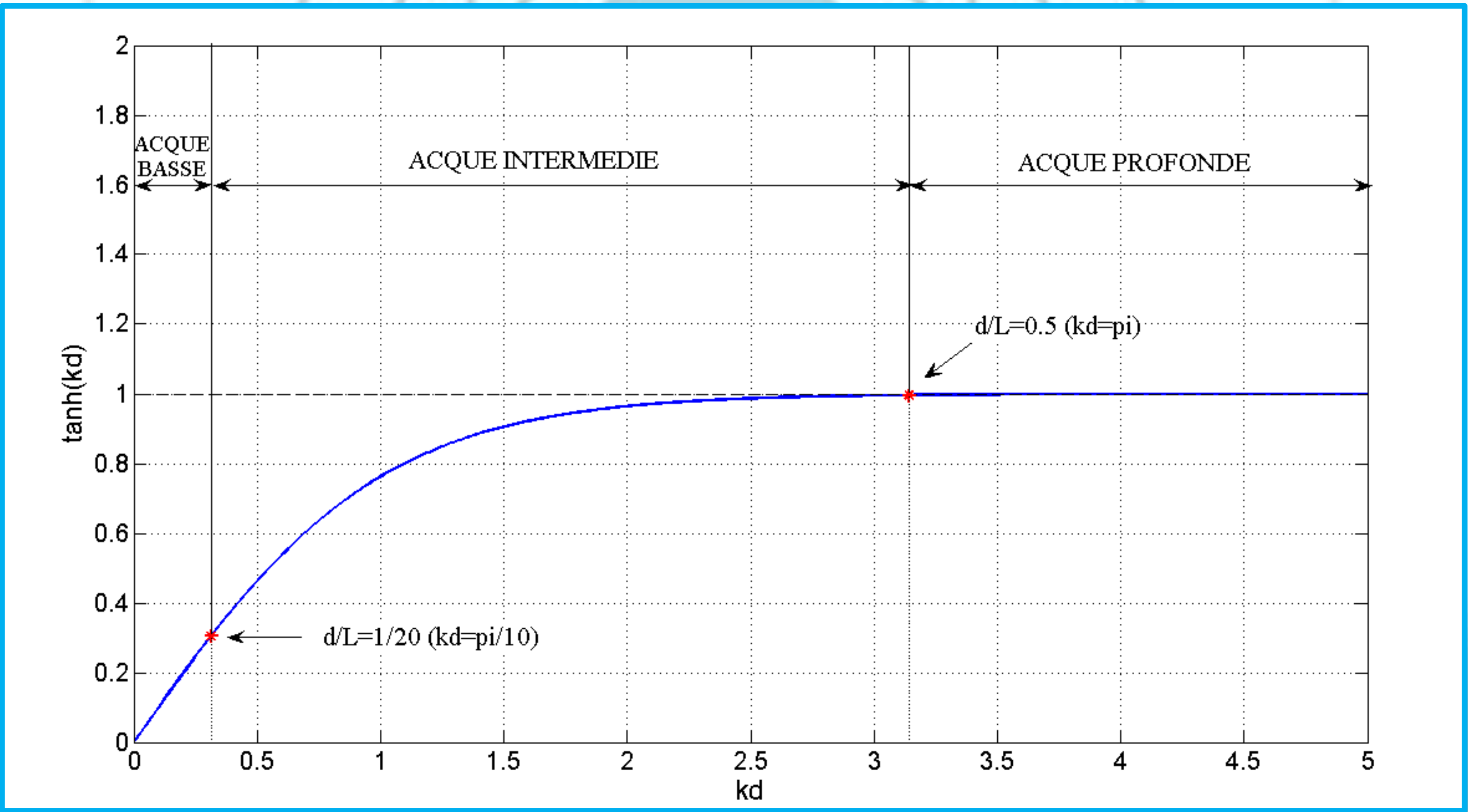
Celerità dell'onda

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

FORMULE UTILI

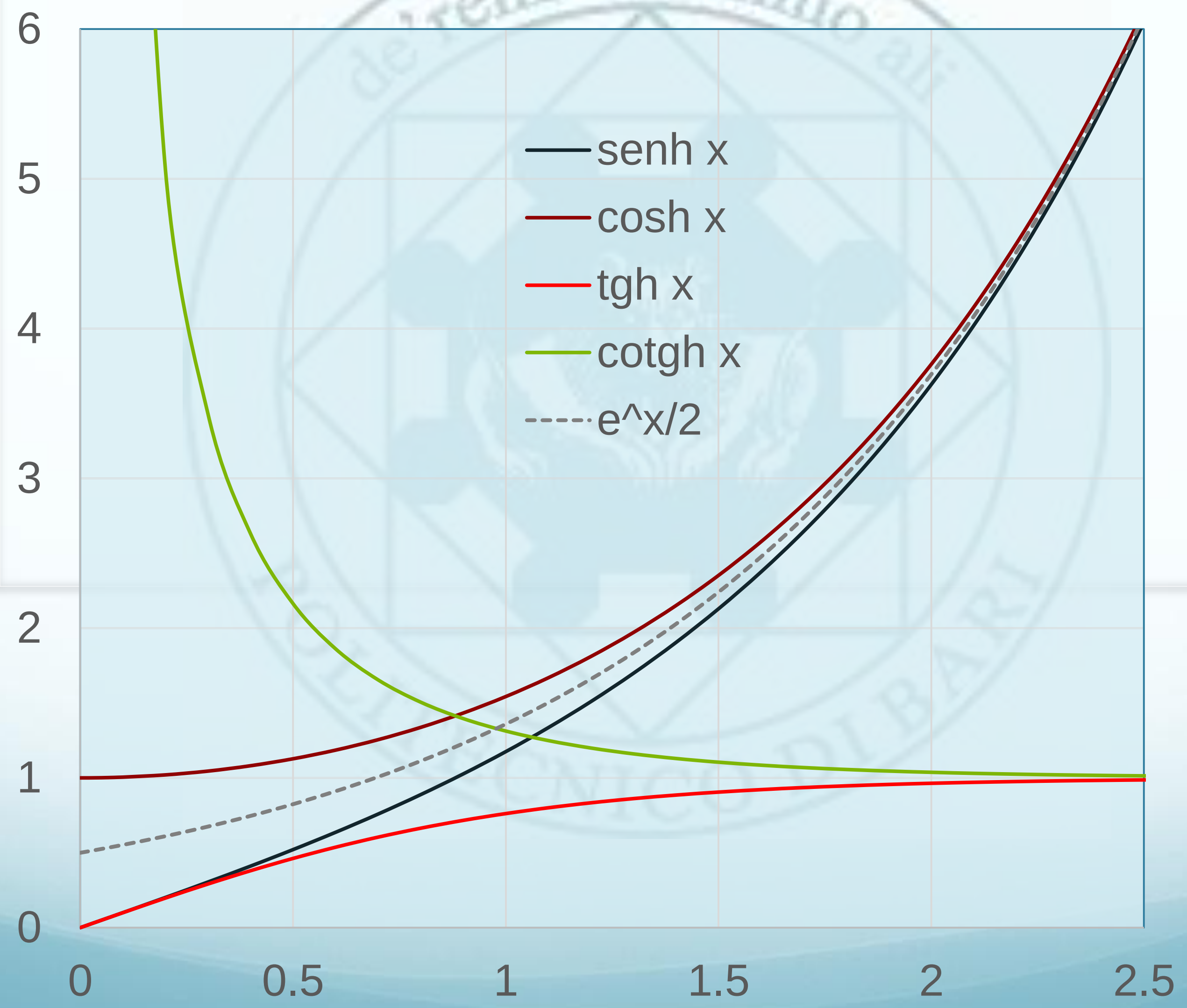
Table II-1-1
Classification of Water Waves

Classification	d/L	kd	tanh (kd)
Deep water	1/2 to ∞	π to ∞	≈ 1
Transitional	1/20 to 1/2	π/10 to π	tanh (kd)
Shallow water	0 to 1/20	0 to π/10	≈ kd



FORMULE UTILI

Funzioni iperboliche



FORMULE UTILI

Relative Depth	Shallow Water $\frac{d}{L} < \frac{1}{20}$ $kd < \frac{\pi}{10}$	Transitional Water $\frac{1}{20} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{10} < kd < \frac{\pi}{2}$	Deep Water $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$ $kd > \frac{\pi}{2}$
1. Wave profile	Same As >	$\eta = \frac{H}{2}\cos\left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right] = \frac{H}{2}\cos\theta$	< Same As
2. Wave celerity	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gd}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$C = C_0 = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}$
3. Wavelength	$L = T\sqrt{gd} = CT$	$L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = C_0 T$
4. Group velocity	$C_g = C = \sqrt{gd}$	$C_g = nC = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4\pi d/L}{\sinh(4\pi d/L)}\right] C$	$C_g = \frac{1}{2}C = \frac{gT}{4\pi}$

FORMULE UTILI

Componenti del vettore velocità

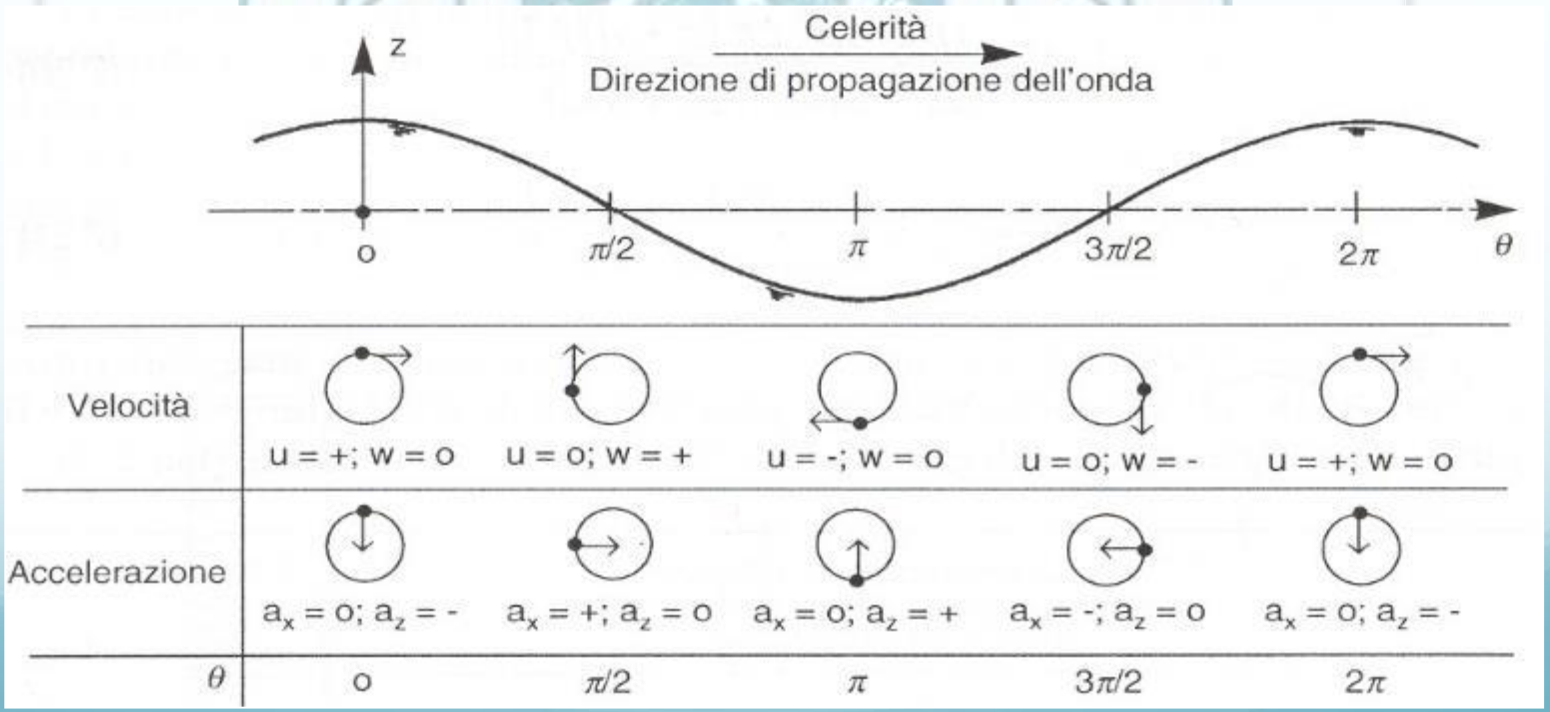
$$u = \frac{HgT}{2L}\frac{\cosh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$

$$w = \frac{HgT}{2L}\frac{\operatorname{senh}(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\operatorname{sen}\Theta$$

Componenti del vettore accelerazione

$$ax = \frac{g\pi H}{L}\frac{\cosh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\operatorname{sen}\Theta$$

$$az = -\frac{g\pi H}{L}\frac{\operatorname{senh}(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$

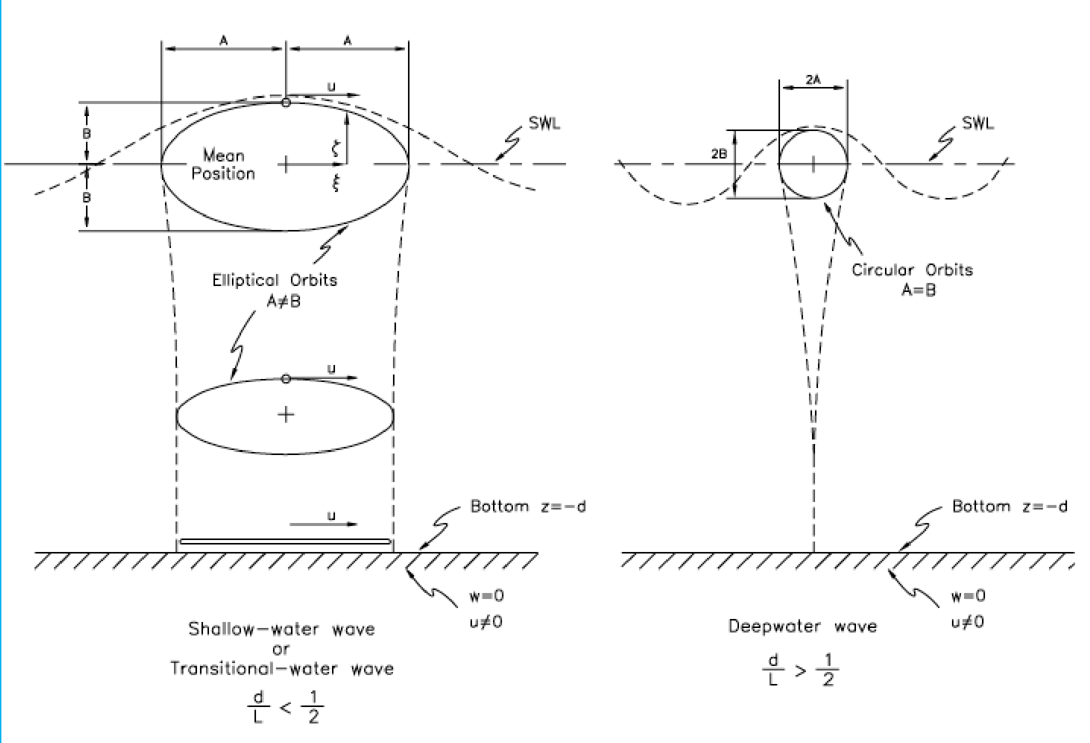


FORMULE UTILI

Componenti del vettore spostamento

$$\xi = -\frac{HgT^2}{4\pi L}\frac{\cosh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\operatorname{sen}\Theta$$

$$\zeta = +\frac{HgT^2}{4\pi L}\frac{\sinh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$



Equazione dell’ellisse

$$\boxed{\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\zeta^2}{B^2} = 1}$$

dove:

$$A = \frac{H}{2}\,\frac{\cosh\left(\frac{2\pi(z+d)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$B = \frac{H}{2}\,\frac{\sinh\left(\frac{2\pi(z+d)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

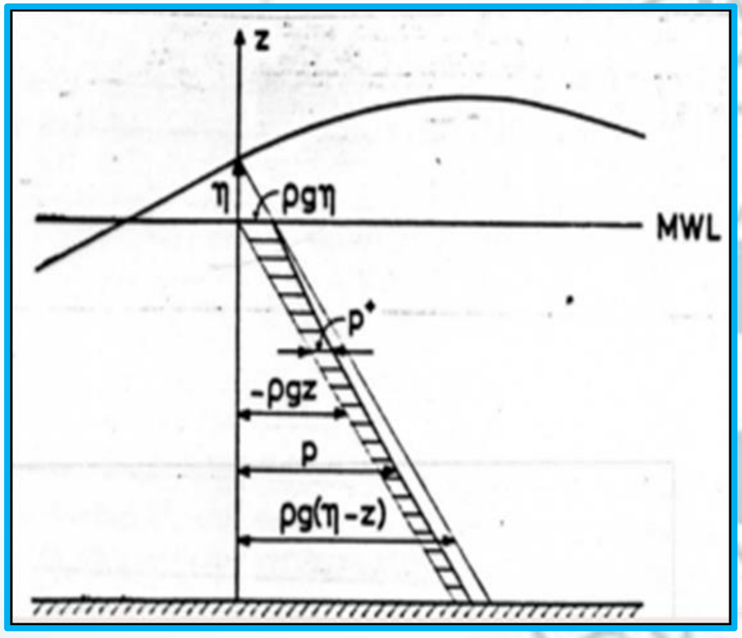
FORMULE UTILI

5. Water particle velocity			
(a) Horizontal	$u = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{d}}\cos\theta$	$u = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\cos\theta$	$u = \frac{\pi H}{T}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$
(b) Vertical	$w = \frac{H\pi}{T}\left(1+\frac{z}{d}\right)\sin\theta$	$w = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\sin\theta$	$w = \frac{\pi H}{T}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$
6. Water particle accelerations			
(a) Horizontal	$a_x = \frac{H\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{d}}\sin\theta$	$a_x = \frac{g\pi H}{L}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\sin\theta$	$a_x = 2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$
(b) Vertical	$a_z = -2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos\theta$	$a_z = -\frac{g\pi H}{L}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\cos\theta$	$a_z = -2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$
7. Water particle displacements			
(a) Horizontal	$\xi = -\frac{HT}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}\sin\theta$	$\xi = -\frac{H}{2}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)}\sin\theta$	$\xi = -\frac{H}{2}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$
(b) Vertical	$\zeta = \frac{H}{2}\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos\theta$	$\zeta = \frac{H}{2}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)}\cos\theta$	$\zeta = \frac{H}{2}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$

FORMULE UTILI

$$p = \rho g \eta \, \frac{\cosh\left[\frac{2\pi(z\ +}{L}\right.}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right.}$$

Pressione



$$\boxed{p = p^{+} - \rho g z}$$

$$\boxed{p^{+} = \frac{\rho g \, H \, cosh\left[\frac{2\,\pi(z+d)}{L}\right]}{2\cosh\left(\frac{2\,\pi d}{L}\right)} \cos\theta - \rho g z}$$

$$\eta = \frac{H}{2} cos\left(\frac{2\,\pi x}{L} - \frac{2\,\pi t}{T}\right) = \frac{H}{2}\cos\theta$$

$$p = \rho g \eta \frac{cosh\left[\frac{2\,\pi(z+d)}{L}\right]}{2\cosh\left(\frac{2\,\pi d}{L}\right)} - \rho g z$$

8. Subsurface pressure	$p = \rho g(\eta - z)$	$p = \rho g \eta \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} - \rho g z$	$p = \rho g \eta \, e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} - \rho g z$

Esercizio n.1

Un'onda di periodo T=10 s si propaga dal largo verso riva su un fondale con pendenza uniforme da una profondità d_1=200 m ad una profondità d_2 pari a 3 m. Calcolare la celerità e la lunghezza dell'onda alle profondità d_1 e d_2

Esistono delle relazioni che legano $\frac{d}{L}$ a $\frac{d}{L_0}$

$$\boldsymbol{L_0 = 1.56\,T^2 = 1.56 \cdot \left(10^2\right) = 156\,m}$$

$$\frac{\mathbf{d_1}}{\mathbf{L_0}} = \frac{\mathbf{200}}{\mathbf{156}} = \mathbf{1.2821}$$

$$\frac{\boldsymbol{d_2}}{\boldsymbol{L_0}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{156}} = \mathbf{0.0192}$$

Esercizio n.1

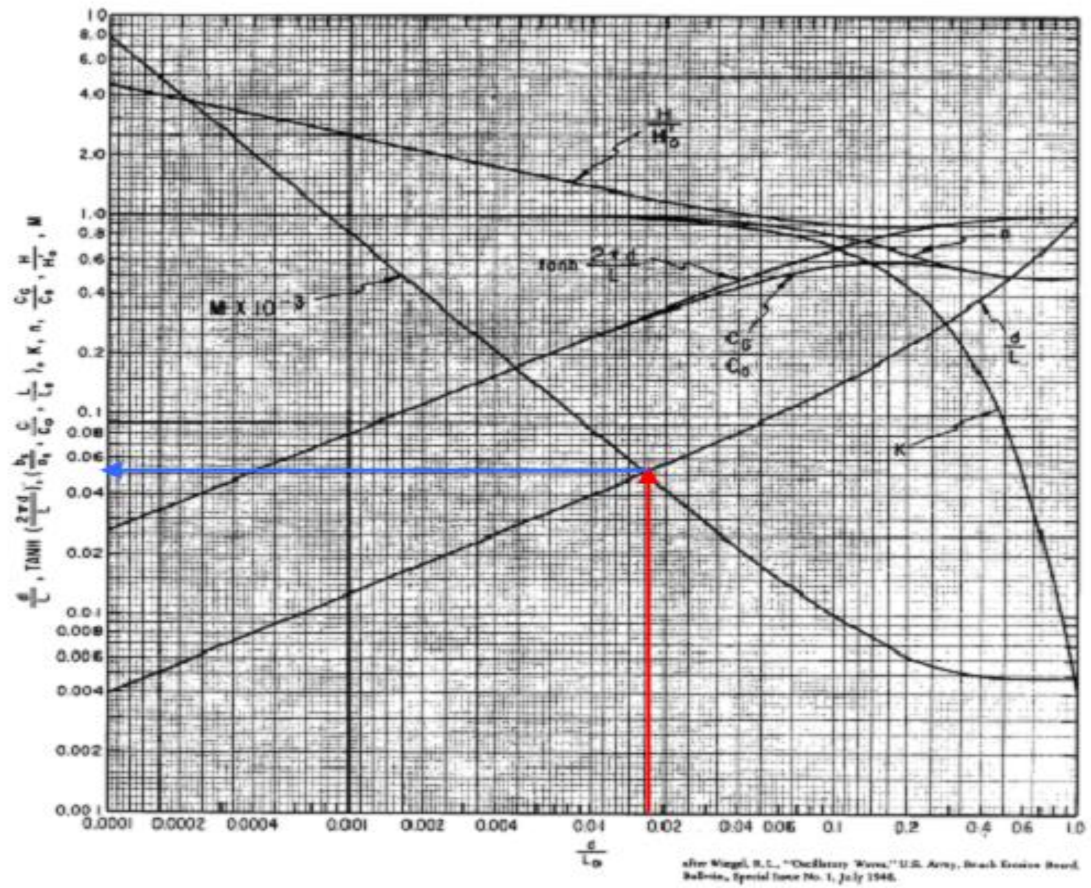


Plate C-1. Illustration of various functions of $\frac{d}{L_o}$

d/L	d/L_o
.05000	.01521
.05100	.01580
.05200	.01641
.05300	.01702
.05400	.01765
.05500	.01829
.05600	.01893
.05700	.01958
.05800	.02025
.05900	.02092

Esercizio n.1

Si dimostra che se $\frac{d_1}{L_0} > 1 \rightarrow \frac{d_1}{L} = \frac{d}{L_0}$

$$d_1 = 200\,m \rightarrow L_1 = L_0 = 156\,m$$

$$d_2 = 3\,m \rightarrow \frac{d_2}{L_2} = 0.056 \rightarrow 53.5\ \ m$$

$$C_1 = \frac{L_1}{T} = \frac{156}{10} = 15.6\,\frac{m}{s} \qquad C_2 = \frac{L_2}{T} = \frac{53.5}{10} = 5.35\,\frac{m}{s}$$

*Calcolo della lunghezza d'onda L alla profondità generica d, per iterazione a partire dalla lunghezza d'onda al largo L_0 $(L_{disp}.m)$

Esercizio n. 2

Un'onda di periodo T = 8 s e altezza H = 5.5 m si trova ad una profondità d pari a 15 m. Calcolare le componenti di velocità e di accelerazione lungo le direzioni orizzontale e verticale ad una profondità z = - 5 m dal L.M.M., quando **θ = 60°.**

$$L_0 = 1.56\,T^2 = 1.56 \cdot (8^2) = 99.8\,m$$

$$\frac{d}{L_0} = \frac{15}{99.8} = 0.1503 \qquad \frac{d}{L} = 0.1835$$

$$L = 81.7\,m$$

Componenti dei vettori velocità e accelerazione

$$u = \frac{HgT}{2L}\,\frac{\cosh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$

$$w = \frac{HgT}{2L}\,\frac{\mathrm{senh}(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

$$ax = \frac{g\pi H}{L}\,\frac{\cosh(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\,\mathrm{sen}\,\Theta$$

$$az = -\frac{g\pi H}{L}\,\frac{\mathrm{senh}(2\pi(z+d)/L)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$

Esercizio n. 2

Un'onda di periodo T=8 e altezza H=5.5 m si trova ad una profondità d pari a 15 m. Calcolare le componenti di velocità e di accelerazione lungo le direzioni orizzontale e verticale ad una profondità z = - 5 m dal L.M.M., quando **θ = 60°.**

$$L_0 = 1.56\,T^2 = 1.56 \cdot (8^2) = 99.8\,m$$

$$\frac{d}{L_0} = \frac{15}{99.8} = 0.1503 \qquad \frac{d}{L} = 0.1835$$

$$\underline{L = 81.7\,m}$$

Componenti dei vettori velocità e accelerazione

$$u = 1.515(1.1306)(0.500) = 0.99\ m/s$$

$$w = 1.515(0.8472)(0.866) = 1.11\ m/s$$

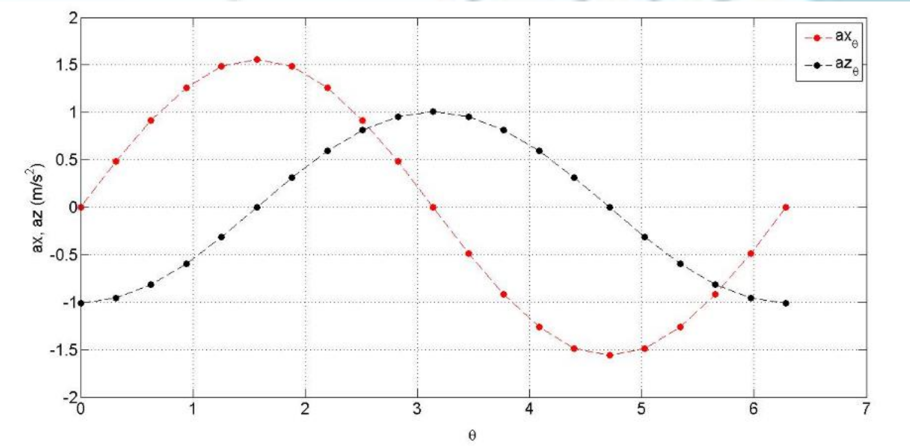
$$\alpha_x = 1.190(1.3106)(0.866) = 1.35\ m/s^2$$

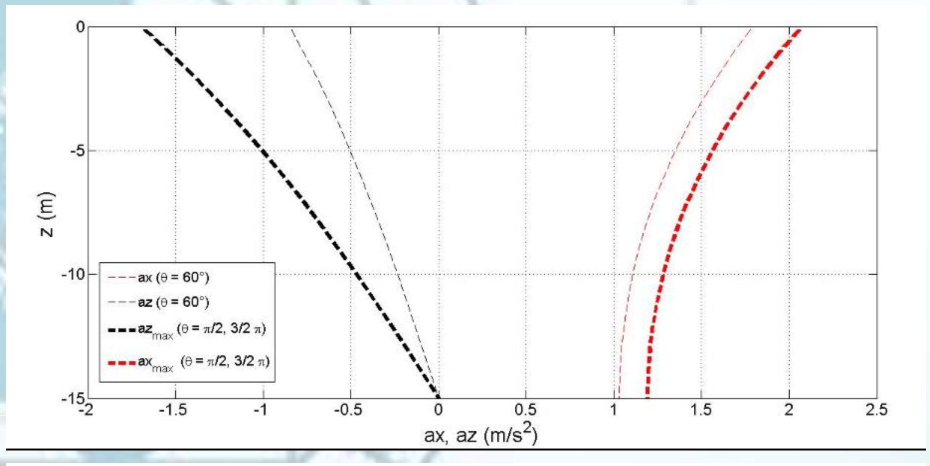
$$\alpha_z = -1.190(0.8472)(0.500) = -0.50\ m/s^2$$

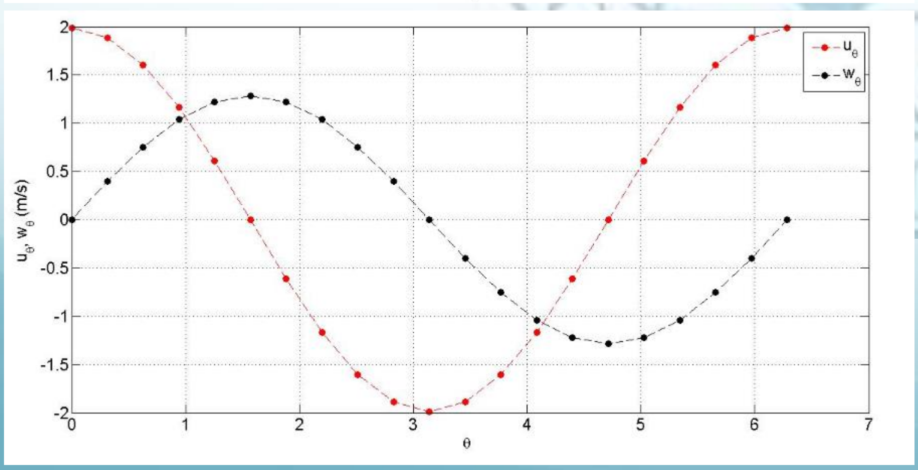
(comp_vel.m) *(comp_acc.m)*

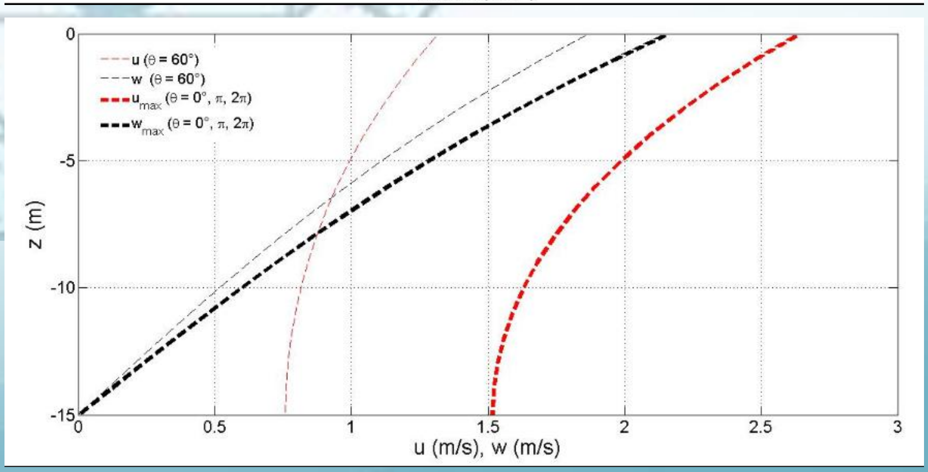
Esercizio n. 2

Un’onda di periodo T=8 e altezza H=5.5 m si trova ad una profondità d pari a 15 m. Calcolare le componenti di velocità e di accelerazione lungo le direzioni orizzontale e verticale ad una profondità z = - 5 m dal L.M.M., quando **θ = 60°.**









Esercizio n. 3

Consideriamo un'onda di periodo T=10 s e altezza H=3 m ad una profondità d pari a 12 m. La relativa altezza in acque profonde è pari a 3.13 m. Calcolare:

i) il massimo spostamento nelle due direzioni x e z rispetto alla posizione media della particella di acqua ad una quota z=0 e z= -d;

ii) Lo spostamento massimo della particella di acqua ad una quota z=-7.5 m in acque profonde.

$$z = 0$$

$$A = \frac{H}{2} \frac{1}{\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$B = \frac{H}{2}$$

$$z = -d$$

$$A = \frac{H}{2 \sinh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$B = 0$$

Esercizio n. 3

$$L_0 = 1.56\,T^2 = 1.56 \cdot (10^2) = 156\ m$$

$$\sinh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = 0.8306$$

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = 0.6389$$

$$z = 0$$

$$A = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(0.6389)} = 2.35\ m\ (7.70\ ft)$$

$$B = \frac{H}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\ m\ (4.92\ ft)$$

$$z = -d$$

$$A = \frac{H}{2\,\sinh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} = \frac{3}{2(0.8306)} = 1.81\ m$$

Esercizio n. 3

$$A = B = \frac{H}{2} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \quad \text{for } \frac{d}{L} > \frac{1}{2} \text{ (i.e., deepwater limit)}$$

$$\frac{2\pi z}{L} = \frac{2\pi(-7.5)}{156} = -0.302$$

$$e^{-0.302} = 0.739$$

$$A = B = \frac{H_0}{2} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} = \frac{3.13}{2}(0.739) = 1.16 \ m$$

Esercizio n. 4

Un trasduttore di pressione posto a 0.6 m dal fondo ad una profondità di 12 m, misura una pressione media massima p=124 KN/mq.

Calcolare l'altezza d'onda, assumendo valida la teoria lineare e considerando una frequenza media corrispondente all'ampiezza media dell'onda pari a 0.06666 Hz.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{(0.0666)} = 15\ s$$

$$L_0 = 1.56T^2 = 1.56(15)^2 = 351\ m$$

$$\frac{d}{L_0} = \frac{12}{351} = 0.0342$$

$$\frac{d}{L} = 0.07651$$

$$L = \frac{12}{(0.07651)} = 156.8\ m$$

Esercizio n. 4

$$\frac{\cosh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} = \frac{\cosh\left[\frac{2\pi(-11.4+12)}{156.8}\right]}{1.1178} = 0.8949$$

$$\eta = a = H/2$$

$$p = \rho g \eta \frac{\cosh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} - \rho g z$$

$$H = 2.08 \ m$$