CORSO DI
REGIME E PROTEZIONE DEI LITORALI

MECCANICA DEL MOTO ONDOSO
Teoria di Airy

Staff Didattico: L. Damiani, M. F. Bruno, D. Malcangio, M. Molfetta, A. Saponieri, L. Pratola, M. Mali, N. Valentini

TEORIE PER LO STUDIO DELLE ONDE REGOLARI:

Le teorie per lo studio delle onde servono per descrivere il campo di moto dell'onda nel dominio dello spazio e del tempo:

- **Definire la variazione dell'elevazione $\eta(x, t)$ (contorno del campo di moto)**
- **Definire i valori delle componenti di velocità;**
- **Definire le traiettorie delle particelle;**
- **Definire l'eccesso di pressione;**
- **Definire il contenuto di energia;**
- **Definire l'evoluzione delle onde al variare della profondità;**
- **Ecc.**

Onde stokiane

Le onde regolari e progressive possono essere studiate con metodi perturbativi (di approssimazione).

La soluzione è fornita in forma aperta (approssimata). Essa viene cioè desunta da uno sviluppo in serie che può essere arrestato all’ordine di potenza più opportuno.

La teoria più diffusa è quella di **STOKES**, che descrive onde di superficie bidimensionali di ampiezza finita.

Ipotesi fondamentali

- ❑ Onde regolari: periodiche, progressive, superficiali, bidimensionali
- ❑ Fluido perfetto (omogeneo, incomprimibile, inviscido)
- ❑ Moto a potenziale di velocità ⇒ moto irrotazionale
- ❑ Profondità costante
- ❑ Fondo impermeabile ⇒ $w=0$
- ❑ Le onde non interagiscono con altri tipi di moto

La teoria di **AIRY**, può considerarsi una semplificazione della teoria di Sokes, applicabile ad onde di piccola ampiezza, sinusoidali.

Alle precedenti ipotesi è necessario aggiungere quella di «**onde di piccola ampiezza**». In tal caso la soluzione al problema è lineare e coincide con la soluzione di Stokes al primo ordine.

Richiami di IDRAULICA

Le ipotesi assunte sono già state introdotte per altri problemi di idrodinamica.

Ad esempio nello studio dei moti di filtrazione.

Qui di seguito si richiamano le equazioni fondamentali riferite a moti bidimensionali di fluidi perfetti.

Moti a potenziale di Velocità

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = w \end{cases} \Rightarrow \text{Moto irrotazionale} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Equazione di Laplace

(da eqz di continuità per fluidi incomprimibili)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

Equazione di Eulero

(per fluidi inviscidi)

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = grad(p) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho\left(F_x - \dfrac{du}{dt}\right) = \dfrac{\partial p}{dx} \\ \rho\left(F_z - \dfrac{dw}{dt}\right) = \dfrac{\partial p}{dz} \end{cases}$$

Richiami di IDRAULICA

Le equazioni di Eulero possono essere riscritte ricordando che:

Campo gravitazionale

$$F_x = 0; \; F_z = -g$$

Regola di derivazione totale

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} * \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} * u + \frac{\partial w}{\partial x} * w + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} * \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} * u + \frac{\partial w}{\partial z} * w + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} * \left(\frac{\partial u^2}{\partial z} + \frac{\partial w^2}{\partial z}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Richiami di IDRAULICA

Con le suddette notazioni ed introducendo la funzione potenziale φ, L'equazione di Eulero può essere riscritta come:

Equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{1}{2}*\left(\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{\rho}+gz+\dfrac{1}{2}*\left(\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{p}{\rho}+\dfrac{1}{2}*\left(\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=f_1(z,t) \\ \dfrac{p}{\rho}+gz+\dfrac{1}{2}*\left(\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=f_2(x,t) \end{cases}$$

Sottraendo fra loro le 2 equazioni, si osserva che la funzione f_2 è necessariamente indipendente da x (somma di due termini dipendenti solo da z e t):

$$f_2(x,t)=f_1(z,t)+gz=F(t)$$

Se all'originale funzione potenziale • si sostituisca una nuova funzione potenziale $\phi=\varphi-\int F(t)\,dt$

il risultato della seconda equazione di Eulero non cambia. Infatti: $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial(\varphi-\int F(t)dt)}{\partial x};\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x};\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

Richiami di IDRAULICA

Dalla seconda equazione di Eulero si può quindi ottenere l'equazione di Bernoulli per moti a potenziale di velocità:

Equazioni di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

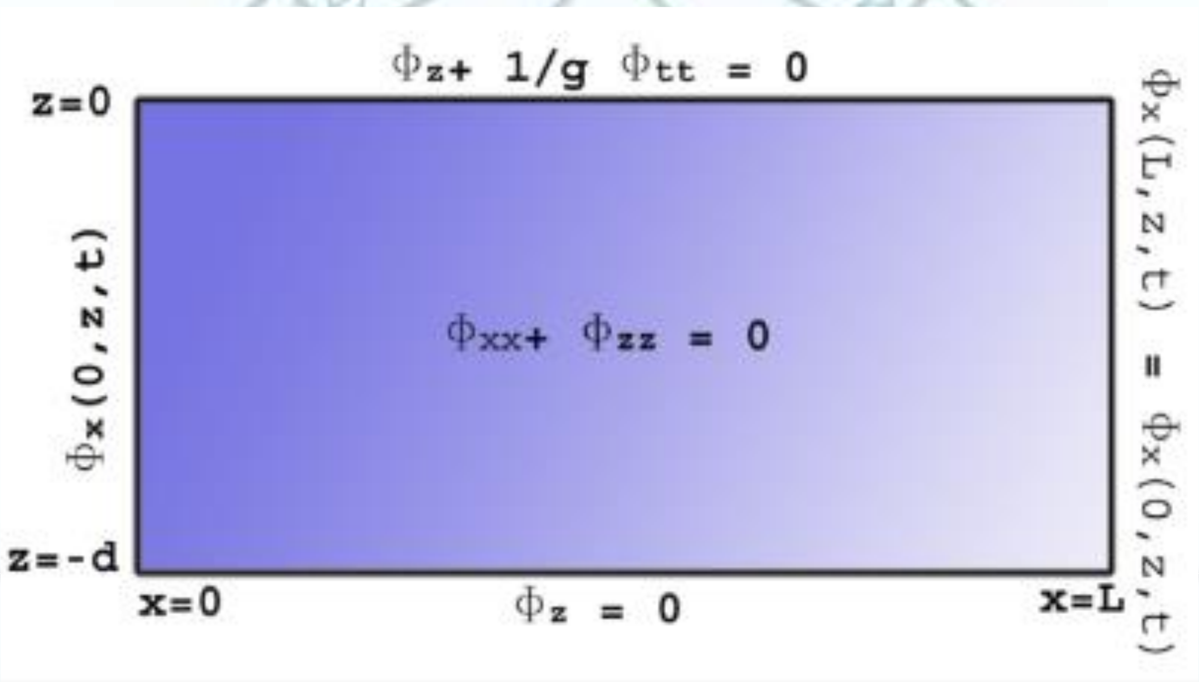
L'equazione di Bernoulli, insieme all'equazione di Laplace precedentemente introdotta definiscono compiutamente il campo di moto delle onde Stokiane.

Per passare alla teoria di **Airy** è necessario imporre la forma dell'onda:

$$\eta = a * cos(\omega t - Kx) = a * \cos(\Theta)$$

DOMINIO DI INTEGRAZIONE E CONDIZIONI AL CONTORNO

La funzione potenziale si ottiene integrando la funzione di Laplace, una volta definito il dominio di integrazione e le condizioni al contorno.



Si può assumere un dominio rettangolare con l'asse delle ascisse, rivolto nella direzione di propagazione delle onde, coincidente con il Livello Medio Mare (ipotesi di piccola ampiezza) e l'altro contorno orizzontale a distanza –d dal precedente (ipotesi di impermeabilità del fondo);

l'asse z, rivolto verso l'alto, coincidente con l'ascissa 0 origine dell'onda e l'altro contorno verticale a distanza L dal precedente (ipotesi di periodicità dell'onda: tutte le componenti del moto si ripeteranno identicamente sui 2 contorni verticali).

DOMINIO DI INTEGRAZIONE E CONDIZIONI AL CONTORNO

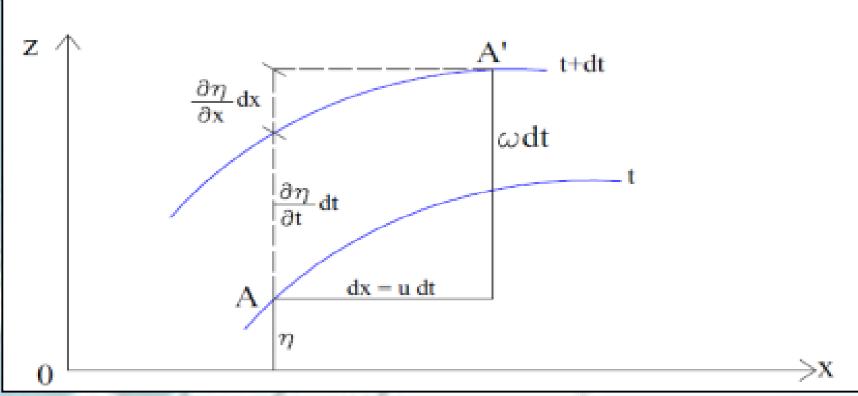
La condizione in superficie si determina dal confronto fra:

CONDIZIONE CINEMATICA

Lo spostamento verticale delle particelle è somma di due componenti:

1. Innalzamento della superficie libera
2. Spostamento sulla superficie libera:

$$dz = w * dt = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \implies w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u * \frac{\partial \eta}{\partial x}$$



CONDIZIONE DINAMICA

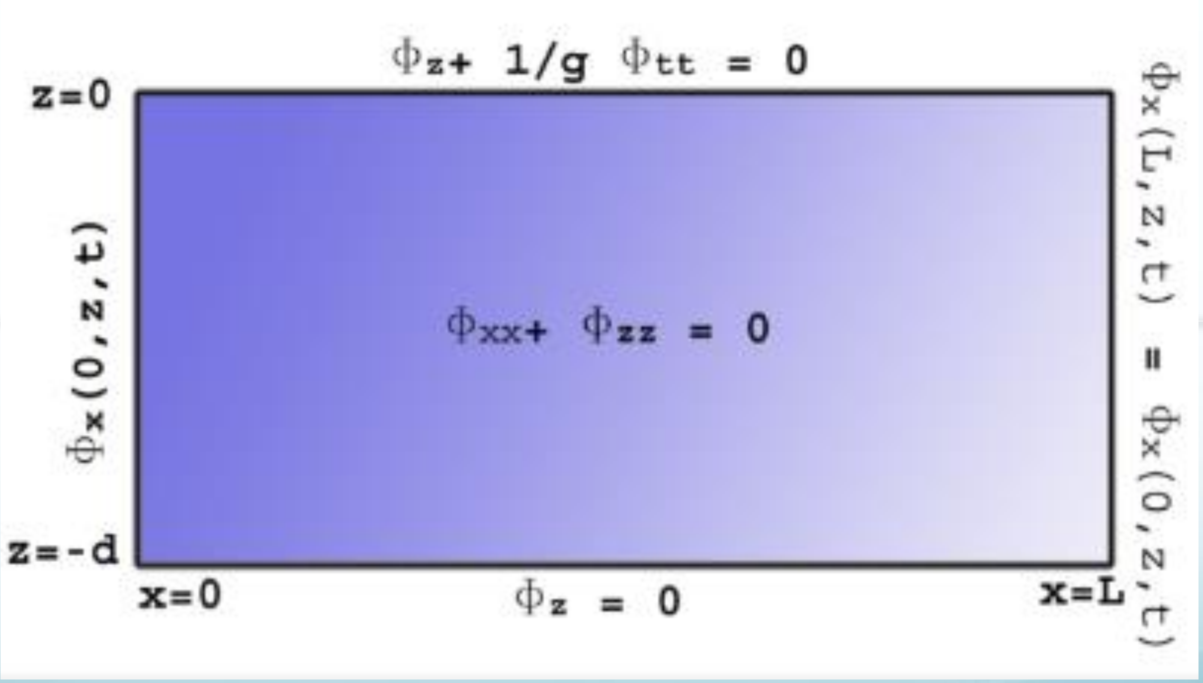
Derivando in *t* l'equazione di Bernoulli scritta per la superficie libera (*p=0 e z=*□) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\eta + \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = g\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2} * \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

DOMINIO DI INTEGRAZIONE E CONDIZIONI AL CONTORNO

Esplicitando il termine $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ da entrambe le equazioni e trascurando tutti i termini non lineari perché infinitesimi di ordine superiore (onde di piccola ampiezza), si ottiene:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{z}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{g}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = \mathbf{0}$$



INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE

Il potenziale può essere espresso come prodotto di funzioni:

$$\phi(x, z, t) = \phi(\Theta, z) = F(\Theta) * G(Z)$$

Con $\Theta = \omega t - kx$

Con i seguenti operatori:

$$\frac{\partial}{\partial x} = -k * \frac{\partial}{\partial \Theta}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} = k^2 * \frac{\partial^2}{\partial x \Theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega * \frac{\partial}{\partial \Theta}; \frac{\partial^2}{\partial t^2} = k\omega^2 * \frac{\partial^2}{\partial x \Theta^2}$$

L'equazione di Laplace si può scrivere:

$$\boldsymbol{k^2 * \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \implies k^2 * G(z) * \frac{\partial^2 F(\Theta)}{\partial \Theta^2} + F(\Theta) * \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} = 0 \implies -k^2 * \frac{F''(\Theta)}{F(\Theta)} = \frac{G''(z)}{G(z)} = \lambda^2}$$

INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE

Poiché il primo termine dipende solo da Θ ed il secondo solo da z, entrambi saranno uguali ad una costante λ^2.
La precedente equazione ha per soluzioni:

$$\begin{cases} F''(\Theta) = -\dfrac{\lambda^2}{k^2} * F(\Theta) \Longrightarrow F(\Theta) = A * sen\ \dfrac{\lambda}{k}\Theta \\ G''(z) = \lambda^2 * G(z) \Longrightarrow G(z) = Be^{\lambda z} + Ce^{-\lambda z} \end{cases}$$

Introducendo le condizioni al contorno e calcolando le costanti di integrazione, la funzione potenziale può essere scritta come:

$$\boldsymbol{\phi = -\frac{gH}{2\omega}\frac{cosh(k(z+d))}{\cosh(kd)}\ sen\Theta}$$

Con:

$$\boldsymbol{L = \frac{gT^2}{2\pi} tgh(kd)}$$

$$\boldsymbol{c = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}\ tgh(kd)}$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

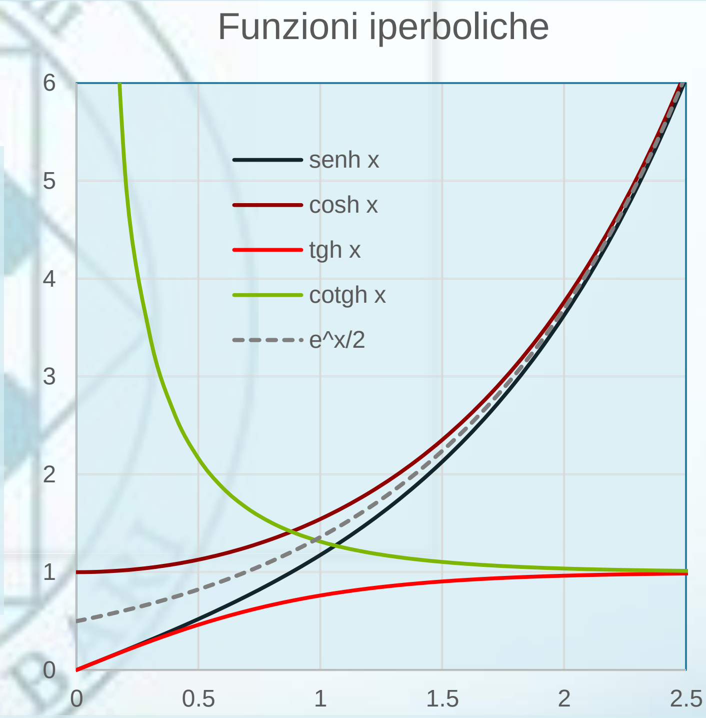
$$\boldsymbol{senh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ tgh\,x = \frac{senh\,x}{cosh\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; cotgh\,x = \frac{1}{tgh\,x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} senh\,x = \lim_{x\to\infty} cosh\,x = \frac{e^x}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} tgh\,x = \lim_{x\to\infty} cotgh\,x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} senh\,x = \lim_{x\to 0} tgh\,x = 0 \longrightarrow x$$

$$\lim_{x\to 0} cosh\,x = 1 \quad \lim_{x\to 0} cotgh\,x = \infty$$



$$\frac{d}{dx} senh\,x = \cosh x\,; \frac{d}{dx} cosh\,x = senh\,x; \frac{d}{dx} tgh\,x = cotgh\,x; \frac{d}{dx} cotgh\,x = \ tgh\,x$$

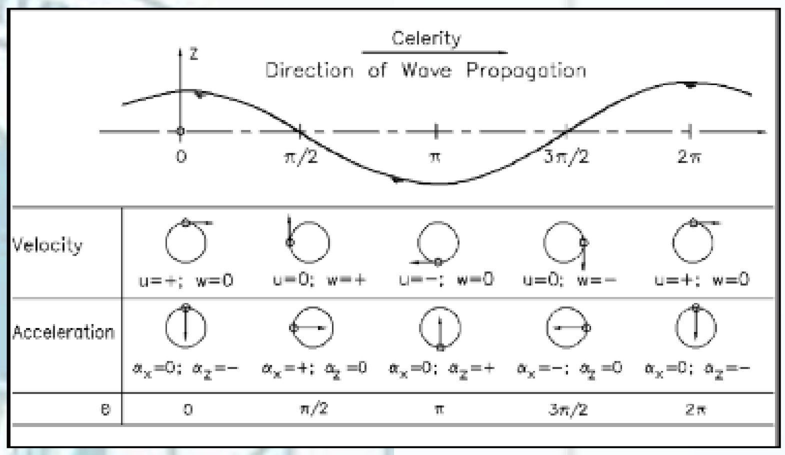
$$\int senh\,x\,dx = \cosh x\,; \int cosh\,x\,dx = senh\,x; \int tgh\,x\,dx = cotgh\,x; \int cotgh\,x\,dx = \ tgh\,x$$

Descrizione del campo di moto

Velocità orbitali

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = k\,\frac{gH}{2\omega}\,\frac{\cosh\big(k(z+d)\big)}{\cosh(kd)}\cos\Theta$$

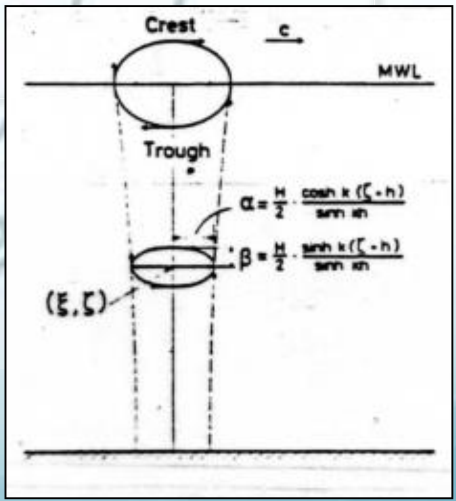
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = w = -k\,\frac{gH}{2\omega}\,\frac{\operatorname{senh}\big(k(z+d)\big)}{\cosh(kd)}\operatorname{sen}\Theta$$



Spostamenti delle particelle

$$\int u\,dt = \xi = k\,\frac{gH}{2\omega}\,\frac{\cosh\big(k(z+d)\big)}{\cosh(kd)}\left(-\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\Theta\right)$$

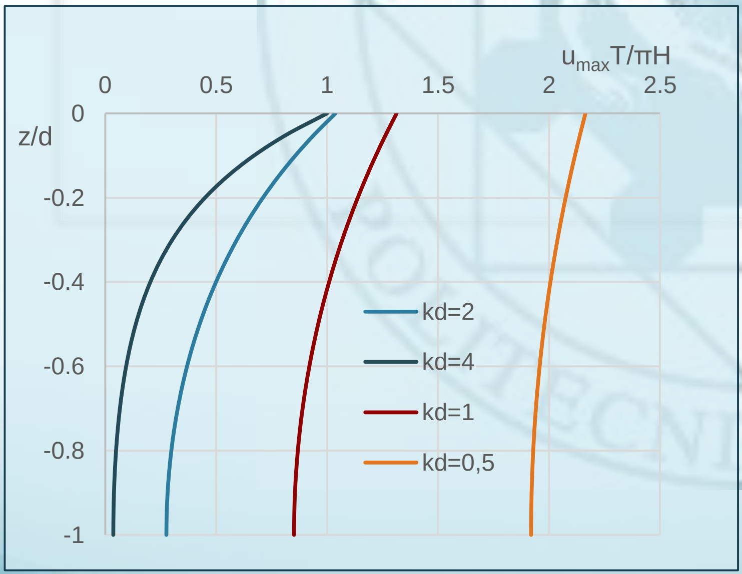
$$\int w\,dt = \zeta = -k\,\frac{gH}{2\omega}\,\frac{\operatorname{senh}\big(k(z+d)\big)}{\cosh(kd)}\left(\frac{1}{\omega}\cos\Theta\right)$$

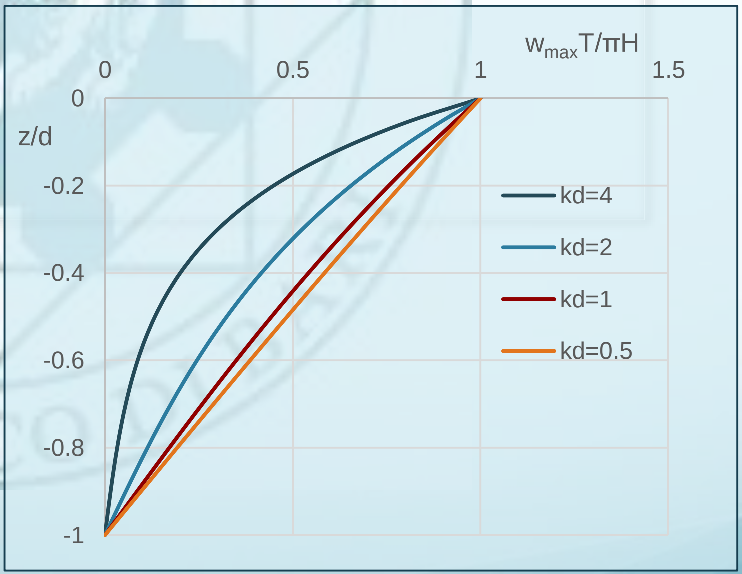


Discussione su velocità orbitali

$$\frac{u_{max}T}{\pi H} = \frac{2\pi}{L}\frac{gT^2}{4\pi}\frac{\cosh\left(k(z+d)\right)}{\cosh(kd)} = \frac{k}{k_0}\frac{\cosh\left(kd\left(z/_d+1\right)\right)}{\cosh(kd)} = \frac{1}{\mathrm{senh}(kd)}\cosh\left(kd\left(z/_d+1\right)\right)$$

$$\frac{w_{max}T}{\pi H} = -\frac{2\pi}{L}\frac{gT^2}{4\pi}\frac{\mathrm{senh}\left(k(z+d)\right)}{\cosh(kd)} = -\frac{k}{k_0}\frac{\mathrm{seh}\left(kd\left(z/_d+1\right)\right)}{\cosh(kd)} = -\frac{1}{\mathrm{senh}(kd)}\mathrm{senh}\left(kd\left(z/_d+1\right)\right)$$





Descrizione del campo di moto

Eccesso di pressione

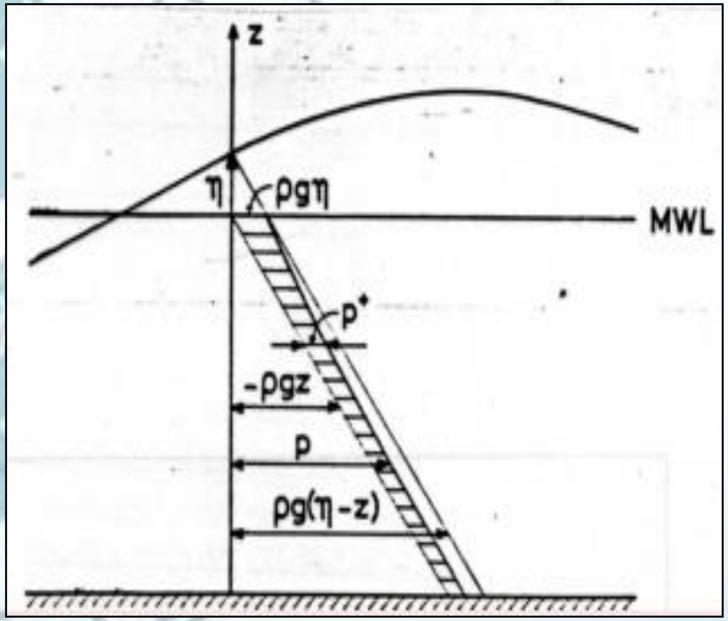
si ottiene dall'eqz di Bernoulli, trascurando i termini lineari:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} * \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow p + \rho g z - \rho \omega \frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh\big(k(z+d)\big)}{\cosh(kd)} cos\Theta = 0$$

se si trascura il contributo idrostatico si ottiene:

$$\boldsymbol{p^+ = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \cos \Theta}$$



Eccesso (o difetto) di pressione prodotto dall'onda

Descrizione del campo di moto

Energia cinetica

$$E_k(\Theta) = \frac{1}{2}\rho\int_{-d}^{0}(u^2 + w^2)dz = \frac{1}{8}\rho\frac{k^2}{\omega^2}\frac{g^2H^2}{cosh^2kd}\int_{-d}^{0}\left(cosh^2\left(k(z+d)\right)cos^2\Theta + senh^2\left(k(z+d)\right)sen^2\Theta\right)dz$$

La suddetta equazione può essere riscritta ricordando che:

1. $\frac{L}{2\pi} = \frac{gT^2}{(2\pi)^2}tgh\,kd \implies \omega^2 = gk\,tgh\,kd = gk\frac{senh\,kd}{cosh\,kd}$
2. $senh\,kd * \cosh kd = \frac{senh\,2kd}{2}$
3. $cosh^2k(z+d) = \frac{e^{2k(z+d)}+e^{-2k(z+d)}+2e^0+2-2}{4} = senh^2\left(k(z+d)\right) + 1$
4. $sen^2\Theta = 1 - cos^2\Theta$
5. $senh^2k(z+d) = \frac{e^{2k(z+d)}+e^{-2k(z+d)}-2e^0}{4} = \frac{\cosh(2k(z+d))-1}{2}$

Descrizione del campo di moto

Energia cinetica

$$E_k(\Theta) = \frac{1}{4}\rho g \frac{kH^2}{senh\ 2kd}\int_{-d}^{0}\left(\left(senh^2\left(k(z+d)\right)+1\right)cos^2\Theta + senh^2\left(k(z+d)\right)\left(1-cos^2\Theta\right)\right)dz =$$

$$= \frac{1}{4}\rho g \frac{kH^2}{senh\ 2kd}\int_{-d}^{0}\left(cos^2\Theta + senh^2\left(k(z+d)\right)\right)dz = \frac{1}{4}\rho g \frac{kH^2}{senh\ 2kd}\int_{-d}^{0}\left(cos^2\Theta + \frac{cosh\ 2\left(k(z+d)\right)-1}{2}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{4}\rho g \frac{kH^2}{senh\ 2kd}\left|z\ cos^2\Theta + \frac{\mathrm{senh}\ 2k(z+d)}{4k} - \frac{1}{2}z\right|_{-d}^{0} = \frac{1}{4}\rho g \frac{kH^2}{senh\ 2kd}\left[d cos^2\Theta + \frac{\mathrm{senh}\ 2kd}{4k} - \frac{1}{2}d\right]$$

Per l'intera onda, ricordando che il valor medio

$$\overline{cos^2}\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2\Theta\ d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\Theta)d\Theta = \frac{1}{2}$$

Si ha la densità di energia cinetica dell'onda:

$$\boldsymbol{E_k = \frac{1}{16}\rho g H^2}$$

Descrizione del campo di moto

Energia potenziale

$$E_p(\Theta) = \int_{-d}^{\eta} \rho g z \, dz - \int_{-d}^{0} \rho g z \, dz = \int_{-d}^{0} \rho g z \, dz = \frac{1}{2}\rho g \eta^2 = \frac{1}{2}\rho g \frac{H^2}{4} \, cos^2\Theta$$

Ricordando che il valor medio di *cos*² per l'intera onda vale: $\overline{cos^2}\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2\Theta \, d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\Theta)d\Theta = \frac{1}{2}$

Si ottiene la densità di energia potenziale dell'onda:

$$\boldsymbol{E_p = \frac{1}{16}\rho g H^2}$$

Densità di energia dell'onda

$$\boldsymbol{E = E_k + E_p = \frac{1}{8}\rho g H^2}$$

Dove studiare?

Libri consigliati

- Elementi di Idraulica Marittima e Costiera; G. Scarsi; Ed. Aracne – cap.2, App. A e B)
- Manuale di Ingegneria portuale e costiera; U. Tomasicchio; Ed. Hoepli – Cap. 5 e 7
- Shore Protection Manual – Cap. 2 (sez. 2)