CORSO DI
REGIME E PROTEZIONE DEI LITORALI

Le onde di mare:
statistica di breve periodo

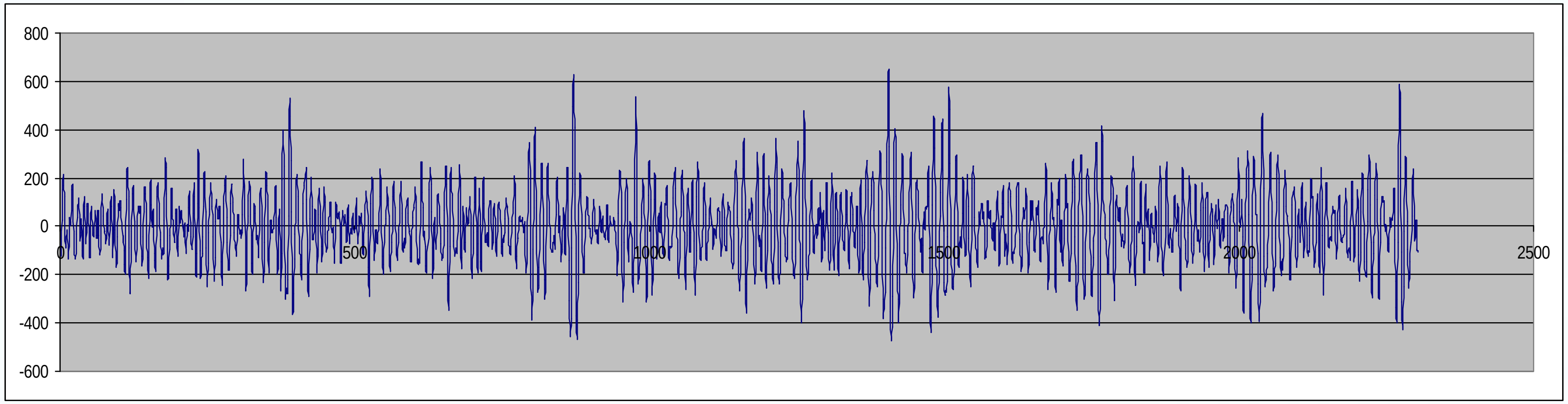
A.A. 2015 – 2016

Staff Didattico: L. Damiani, M. F. Bruno, M. Molfetta, A. Saponieri, L. Pratola, M. Mali

LE ONDE IRREGOLARI E IL CONCETTO DI STATO DI MARE

Il vento che agisce su una estensione di mare (fetch) genera e mantiene un moto ondoso caratterizzato da onde irregolari, che possono essere descritte come la realizzazione di un processo stocastico.

In prima approssimazione esse possono essere considerate come dovute alla
sovrapposizione di onde sinusoidali, con ampiezze, frequenze angolari e direzioni diverse e con fasi aleatorie distribuite uniformemente nell'intervallo $(0,2\pi)$.



Registrazione della serie storica delle elevazioni (η) della superficie del mare rispetto al livello di quiete

Le onde di mare possono essere considerate come un fenomeno stocastico in cui η(t) segue una legge di distribuzione delle probabilità Gaussiana a media nulla.

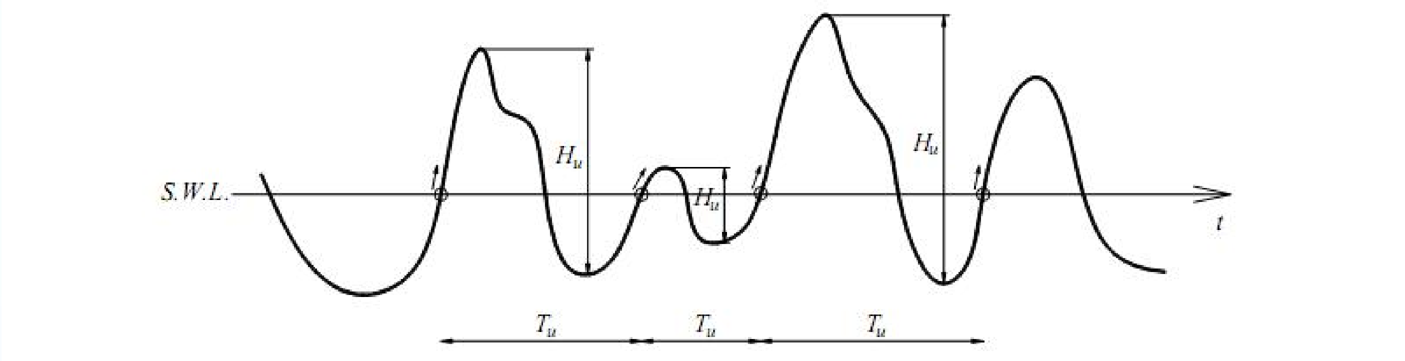
Per media $\mu_x = 0$ e standard deviation $\sigma_x = 1$ La legge di Gauss diventa

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

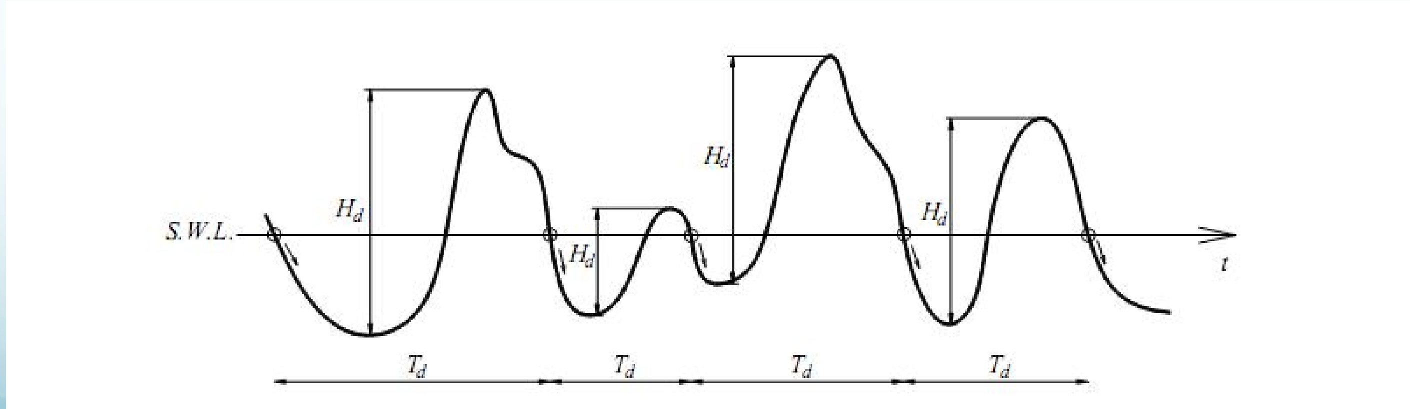
ANALISI NEL DOMINIO DEL TEMPO

I principali metodi per schematizzare le "onde random" sono quelli "zero upcrossing" e "zero downcrossing" con riferimento al dominio del tempo.

Le onde “zero upcrossing” sono individuate da due successivi attraversamenti del livello di quiete con derivata positiva (attraversamenti verso l’alto).



Le onde “zero downcrossing” sono individuate da due successivi attraversamenti del livello di quiete verso il basso.



Individuate le onde con uno dei due metodi e assumendo come riferimento per le sopraelevazioni il livello di quiete, si definisce:

i) cresta: il massimo relativo più alto presente nell'onda;
ii) cavo: il minimo relativo di minore ordinata;
iii) altezza della cresta: ordinata della cresta;
iv) profondità del cavo: il valore assoluto della profondità del cavo;
v) altezza dell'onda: la somma dell'altezza di cresta e della profondità del cavo (in formule $H = h_{cresta} - h_{cavo}$);

Si definisce inoltre stato di mare ("sea state" nella letteratura anglosassone) un'agitazione ondosa stazionaria.

Consideriamo un intervallo di tempo molto lungo T, e ammettiamo di considerare gli intervalli in cui siano presenti un numero molto grande N di onde.
Nei vari intervalli, se <u>l'agitazione ondosa è stazionaria, le caratteristiche medie dei vari insiemi di N onde tendono ad essere le stesse e questa tendenza cresce al crescere di N.</u>
Se, ad esempio, si considera l'altezza media delle N onde (che è una variabile aleatoria), si osserva che la deviazione standard σ_N tende a zero per N tendente a infinito, ovvero:

$$\lim_{N\to\infty}\left[\sigma_N = \sqrt{\left\langle\left(\overline{H}_i - \overline{H}\right)^2\right\rangle}\right] = 0$$

dove H_i è l'altezza media dell'i-esimo gruppo di N onde, e H è l'altezza media delle onde rilevate nell'intero intervallo.

Nel Mediterraneo uno stato di mare può essere considerato stazionario per durate dell'ordine delle centinaia di onde (200÷300 onde).

DEFINIZIONI

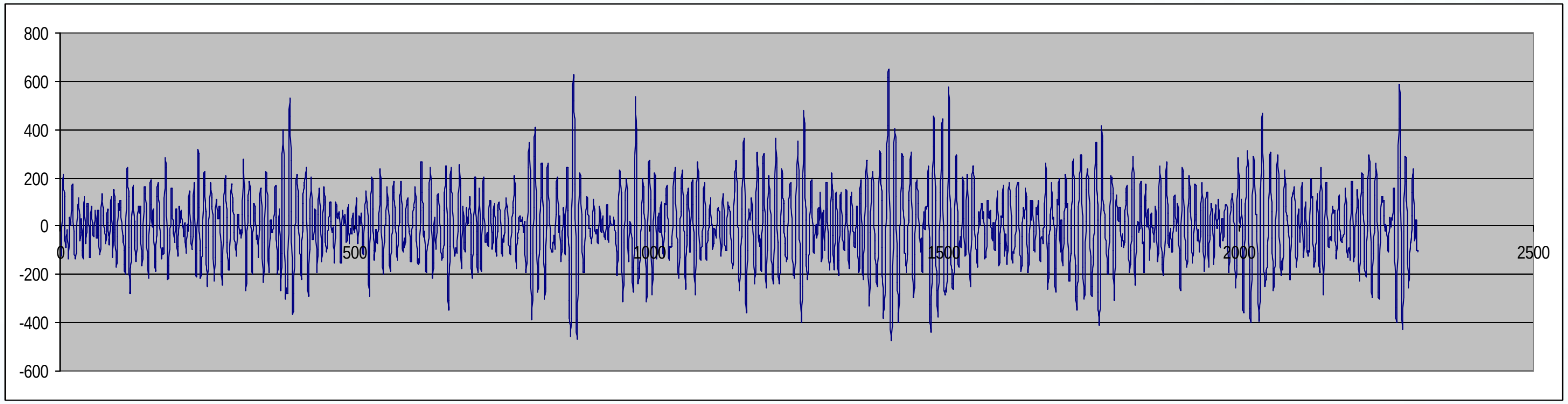
•La densita' di probabilita' di una variabile aleatoria X e' una funzione $f=f(X)$ tale che

$f(X^*)dX$ sia la probabilita' che X assuma un valore compreso tra X^* e X^*+dX

•Probabilità cumulata $P(x)$, la probabilità che la variabile x sia minore o uguale ad un valore prefissato x_a (anche indicata come $P(x \leq x_a)$).
In formule: $P(x)= \int p(x)dx$

•Probabilità di superamento $P_s(x)$ rappresenta la probabilità che x sia maggiore di x_a :

$$P_s(x > x_a)=1- P(x)$$



Determinate le caratteristiche periodo e altezza delle N onde individuate nella registrazione, per eseguire l'analisi statistica, si suddivide la popolazione in classi di altezza.

Si procede, quindi, col calcolare i valori medi e si definiscono i valori massimi nella registrazione.
Se si ordinano le altezze in senso decrescente e si calcolano le frequenze di apparizione, risulta che la funzione di ripartizione è ben approssimata dalla distribuzione di Rayleigh.

Questa legge di distribuzione è valida nel caso di onde completamente sviluppate, in acque profonde e fuori dell'area di generazione, caratterizzate, da spettri a banda stretta .

La probabilità, secondo Rayleigh, che si verifichi un'altezza d'onda maggiore di un certo valore è espressa dalla relazione:

$$P(H > \hat{H}) = e^{-\left(\frac{H}{H_{rms}}\right)^2}$$

nella quale H_{rms} (root mean square height) è il parametro della distribuzione calcolato come

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} H_j^2}$$

La probabilità è pari al numero n di onde superiori a $\hat{H}$ diviso il numero totale N di onde

$$P(H > \hat{H}) = n/N$$

Considerato che l'energia media per unità di superficie di tutte le onde che compongono una registrazione è pari a

$$\overline{E} = \frac{{}^{\circ} g}{8} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} H_j^2$$

risulta che H_{rms} è una misura dell'energia media.

$\hat{H}=0$ Ponendo si considerano tutte le onde della registrazione e si ricavano
alcuni valori caratteristici della distribuzione

l'altezza media $\overline{H} = 0.886 H_{rms}$

e l'altezza significativa $H_s = \sqrt{2} H_{rms}$

La distribuzione di Rayleigh è valida per

onde di mare completamente sviluppate
in acque profonde
e fuori dall'area di generazione

La distribuzione di Gauss è valida per

onde in acque basse.

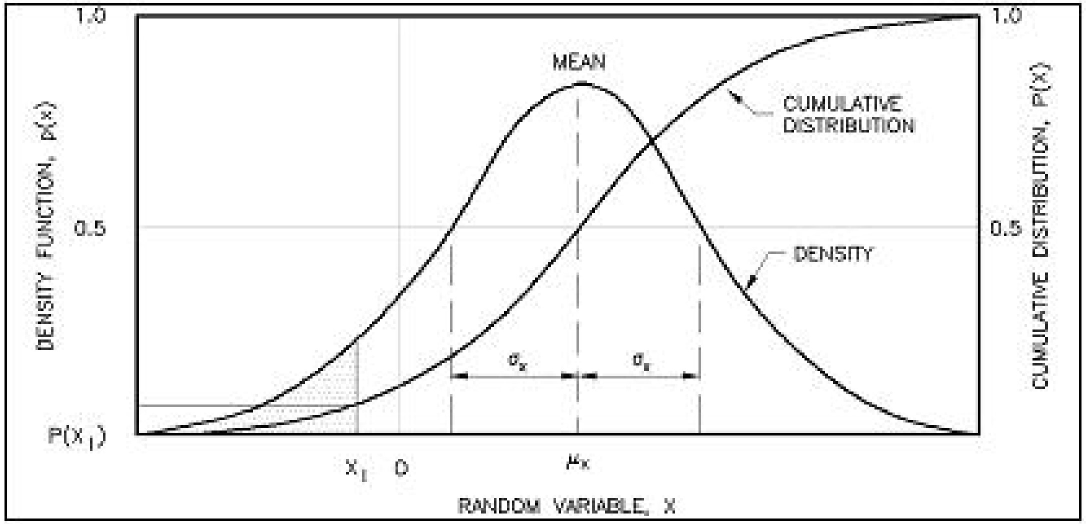


Figure II-1-28. The Gaussian probability density and cumulative probability distribution

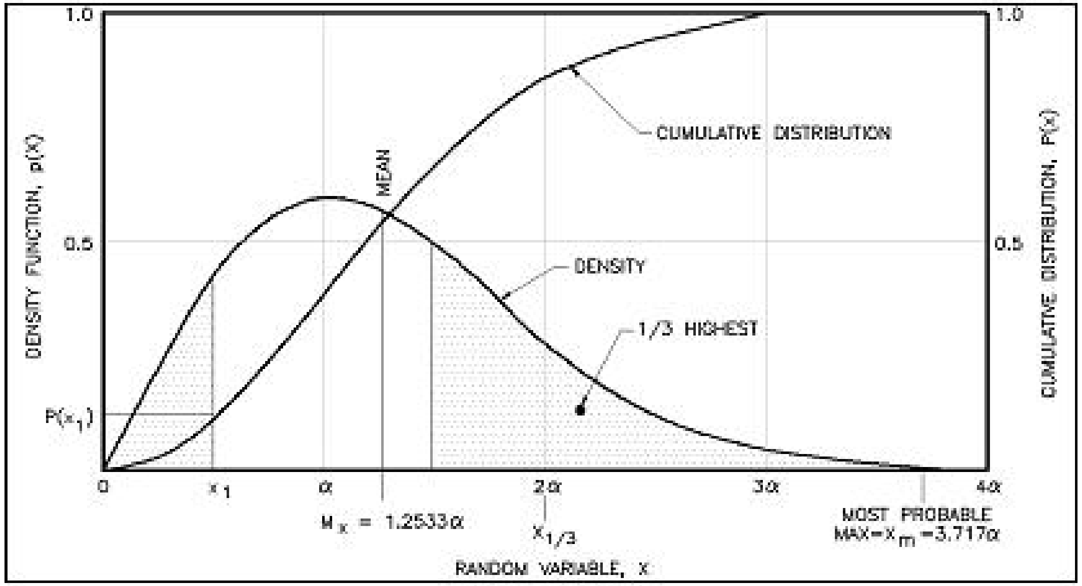
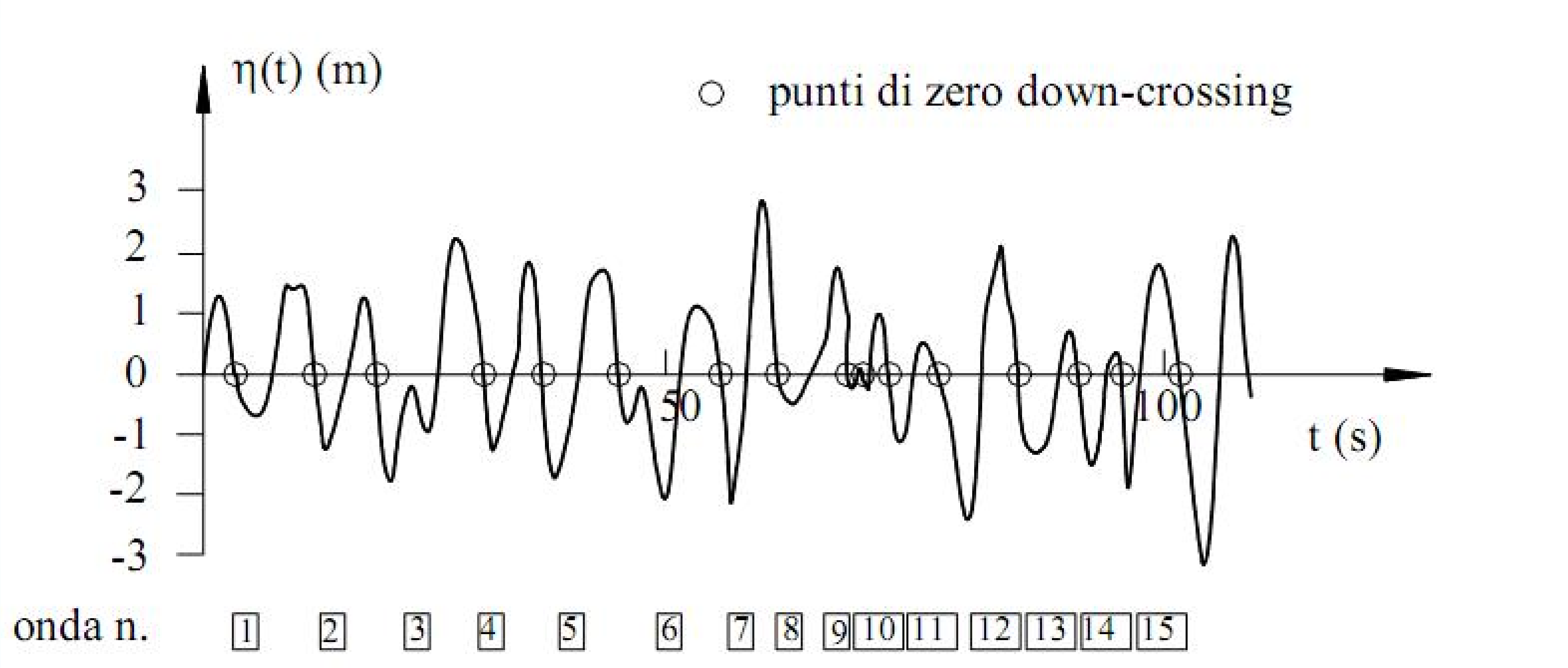


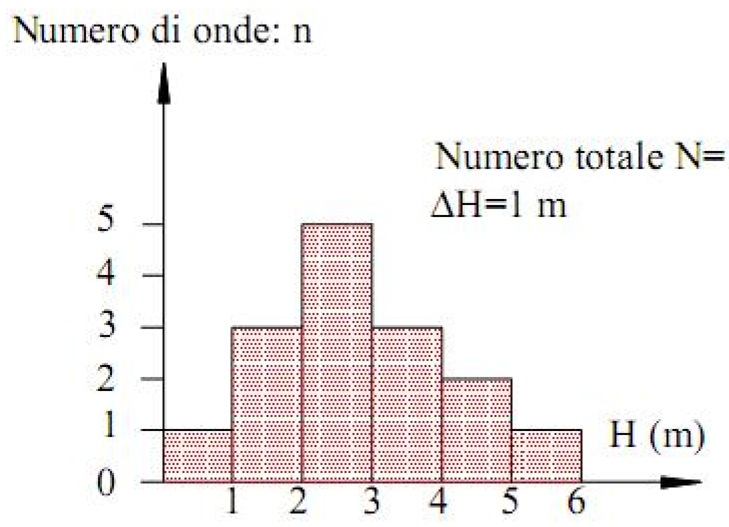
Figure II-1-29. The Rayleigh probability density and cumulative probability distribution (x = α corresponds to the mode)

individuazione di onde con il metodo “zero down-crossing”.

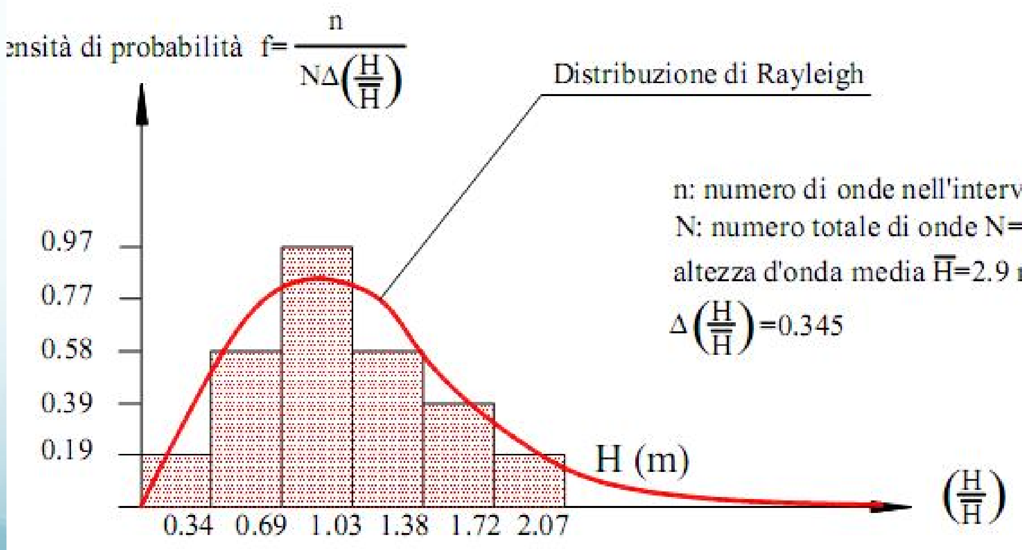


Numerazione in ordine decrescente di onde individuali e dei corrispondenti periodi rilevati con il metodo dello zero-upcrossing da un segnale di sopraelevazione.

Numero d'ordine *i*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
H (m)	5.5	4.8	4.2	3.9	3.8	3.4	2.9	2.8	2.7	2.3	2.2	1.9	1.8	1.1	0.23
T (s)	7	12	15	3	5	4	2	11	6	1	10	8	13	14	9



Distribuzione dei valori di altezza d'onda nel segnale di sopraelevazione.



Distribuzione di Rayleigh che approssima i valori di altezza d'onda nel segnale di sopraelevazione.

L'onda massima: H_{max} e T (H_{max})

Questa è l'onda che presenta l'altezza massima indipendentemente dal periodo che la caratterizza. Con riferimento alla tabella sopra riportata, essa è pari a:

Hmax =5.5 m

T(Hmax)=12.5 s

L'altezza massima viene scelta come onda di progetto per strutture che non solo sono di notevole importanza ma che risultano particolarmente sensibili all'attacco del moto ondoso (come, ad esempio, le dighe frangiflutti).

$$H_{\max} = 0.707\ H_s\sqrt{\ln N}$$

L’onda un decimo: $H_{1/10}$ e T ($H_{1/10}$)

Questa è l’onda individuata effettuando la media del decimo delle onde più alte.
T ($H_{1/10}$) è la media dei periodi che interessano le onde che concorrono a formare $H_{1/10}$.

L’onda significativa: $H_{1/3}$ e T ($H_{1/3}$)

Questa è l’onda ottenuta mediando le altezze d’onda del terzo delle onde più alte.
Il periodo significativo è ottenuto come media dei periodi che delle onde che concorrono ad ottenere $H_{1/3}$.

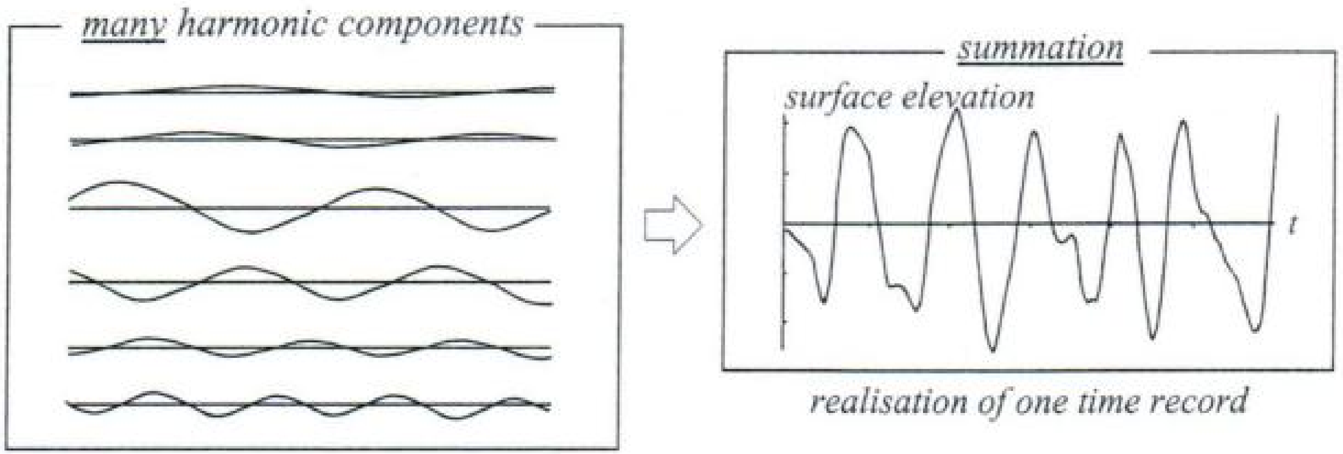
L’onda significativa è molto usata per la progettazione di opere.
Ciò deriva dal fatto che, in passato, l’analisi del moto ondoso veniva effettuata sulla base di dati osservati e che l’esperienza ha mostrato che l’altezza d’onda e il periodo selezionati sulla base di indagini visive corrisponde approssimativamente all’onda significativa.
Pertanto la scelta dell’onda significativa può oggi essere giustificata anche sulla base di una esperienza ingegneristica ormai consolidata.

Assodata la distribuzione di Rayleigh come utile approssimazione delle distribuzioni di onde individuali, è possibile ottenere le seguenti espressioni per le altezze d'onda caratteristiche in funzione dell'altezza d'onda media:

$$H_{1/10} = 2.03\overline{H};$$
$$H_{1/3} = 1.60\overline{H};$$
$$H_{rms} = 1.13\overline{H}.$$

ANALISI SPETTRALE DEL MOTO ONDOSO

La superficie del mare può essere descritta come il risultato della sovrapposizione di onde sinusoidali di ampiezza e frequenza variabili.



La posizione η della superficie del mare, rispetto al livello medio, può essere espressa in funzione del tempo come la somma di una serie di onde sinusoidali (decomposizione in serie di Fourier)

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(\omega_j t - \delta_j)$$

in cui

a_j è l'ampiezza della j-esima componente,

μ_j è la frequenza angolare $2\pi/T_j$

$¢_j$ è la fase della j-esima onda nella sezione di osservazione x=0.

Il segnale random viene così trasformato in un pacchetto di segnali regolari.

La rappresentazione spettrale permette di caratterizzare uno stato di mare con la successione discreta delle a_j, date in funzione delle frequenze (spettro di ampiezza o trasformata di Fourier).

Nella realtà si fa però più spesso ricorso alla funzione che lega ω_j (o f_j) con a_j^2 (spettro di potenza o di varianza):

poiché è stato dimostrato (Kinsman,1965) che l'energia media di un treno d'onde è proporzionale al valore medio del quadrato dell'elevazione, si può comprendere l'utilità di questa rappresentazione.

Nel seguito lo spettro di potenza viene indicato come S o E.

Lo spettro può essere indicato in funzione della frequenza f o di $\omega = 2\pi f$

Si può dimostrare che il quadrato della deviazione standard σ_η delle elevazione è proporzionale alla somma dei quadrati delle a_j

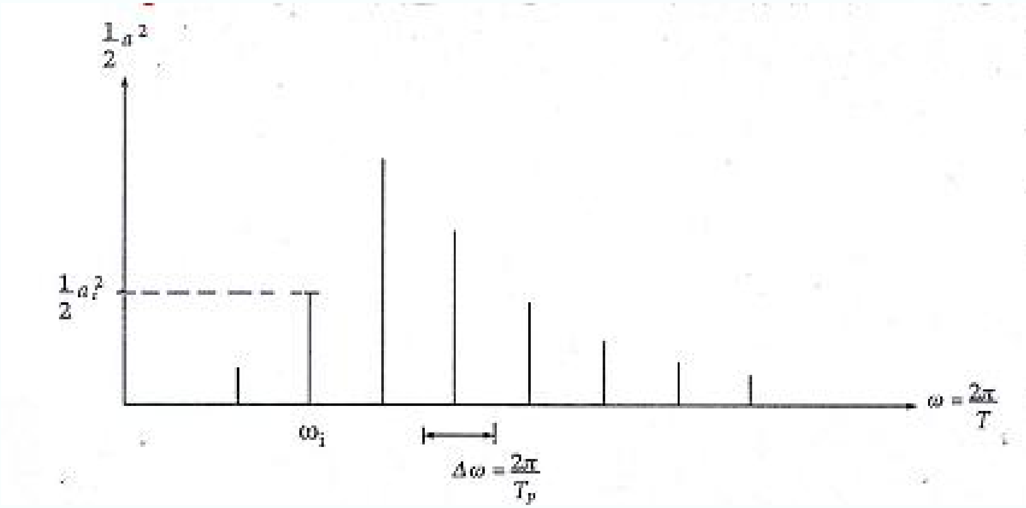
$$\pm^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} a_j^2$$

La distribuzione dell'energia dell'onda, chiamata spettro di frequenza, espressa in funzione della frequenza può essere scritta

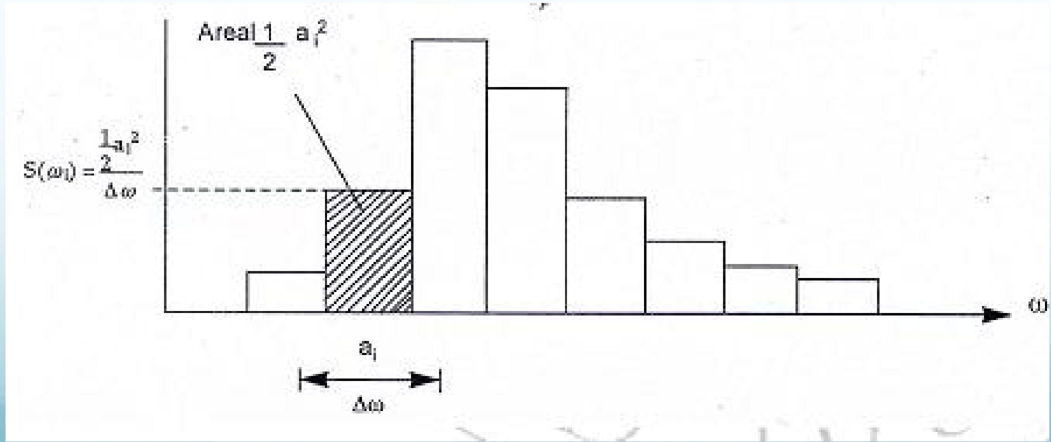
$$E(´_j)(\Delta ´)_j = \frac{1}{2} a_j^2$$

Combinando le due equazioni si ottiene l'espressione dello spettro di energia continuo

$$\pm^2 = E(\mu) = \int_0^\infty E(\mu)\,d\mu$$



Ricavato, lo spettro discreto si costruisce un’istogramma in cui in ogni barra sono raggruppate le onde che hanno valori di frequenza molto vicini. L’energia del moto ondoso è pari all’area sottesa da ogni rettangolo

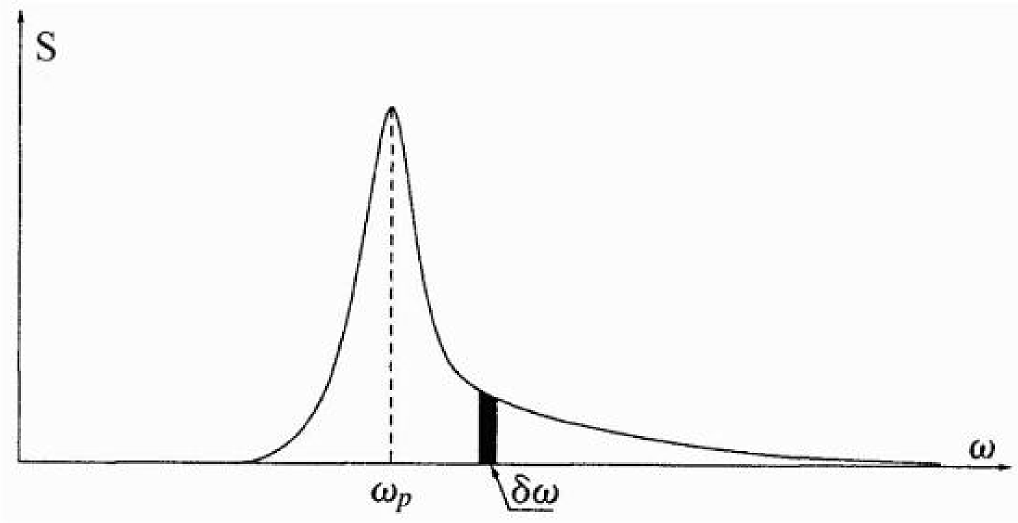


Lo spettro di un’onda monocromatica, avendo una sola frequenza, risulta costituito da un solo segmento proporzionale all’energia associata all’onda stessa.

Le onde irregolari, quindi, essendo composte da più onde sinusoidali, hanno l’energia distribuita sulle diverse frequenze.

Con lo spettro si assegna a ciascuna frequenza la corrispondente energia, individuando, così, le frequenze dominanti nel campo d’onda, cioè quelle a cui corrispondono i valori più elevati di E(ω).

Il numero delle frequenze di picco indica il numero di treni che compongono l’onda.



Rappresentazione tipica di uno spettro relativo alle onde di vento (ossia onde nell’area di generazione con il vento alle spalle).

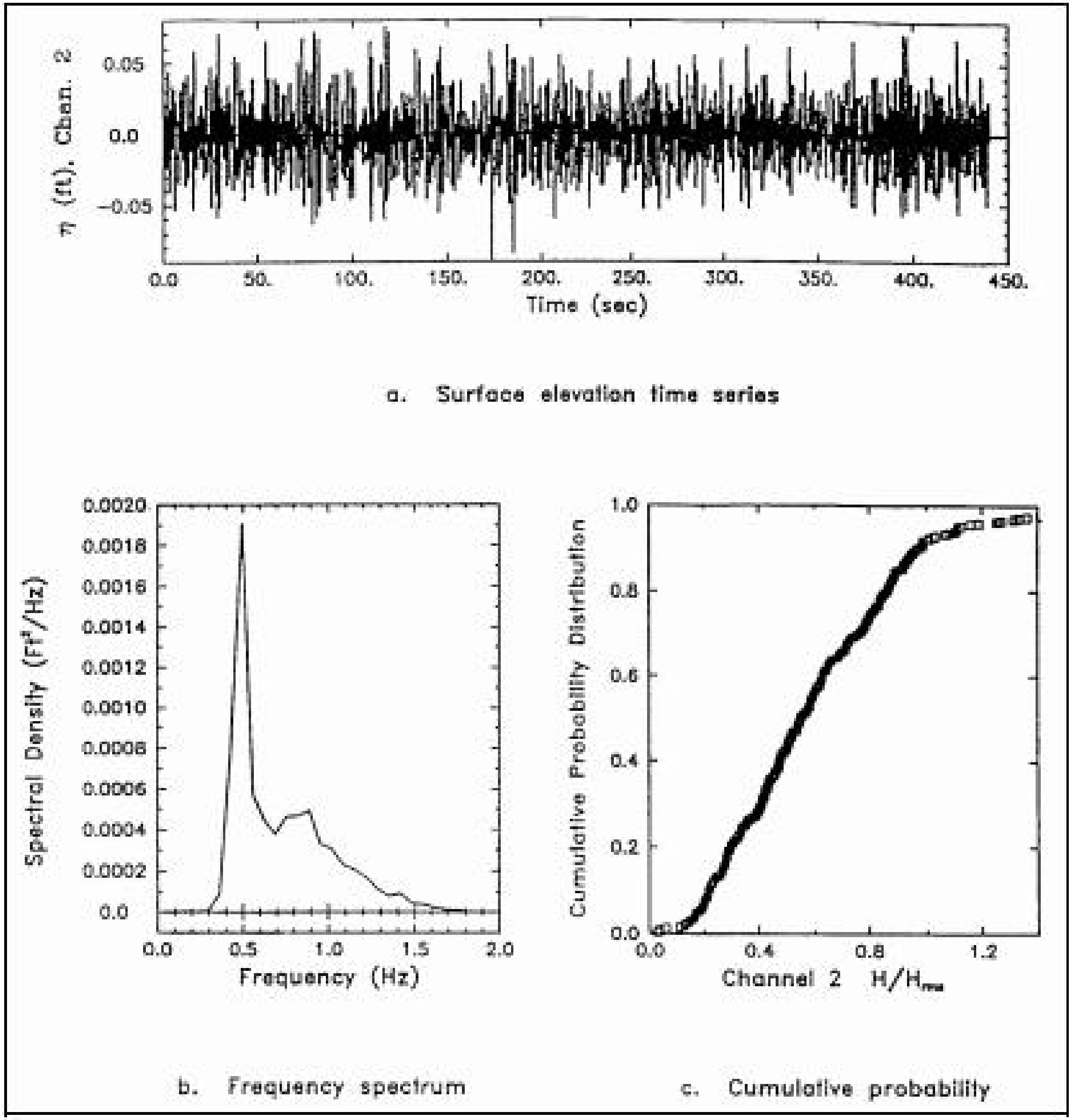


Figure II-1-32. Surface elevation time series of an irregular wave and its spectrum (Briggs et al. 1993)

I momenti n-esimi dello spettro sono definiti come

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n E(f)\,df$$

Il momento di ordine 0, che coincide con la varianza, è uguale all'area sottesa dalla curva, risulta quindi che l'area sotto la curva è pari alla densità di energia.

Dalla distribuzione di Rayleigh risulta che

$$H_{rms} = 2\sqrt{2}\sqrt{E}$$

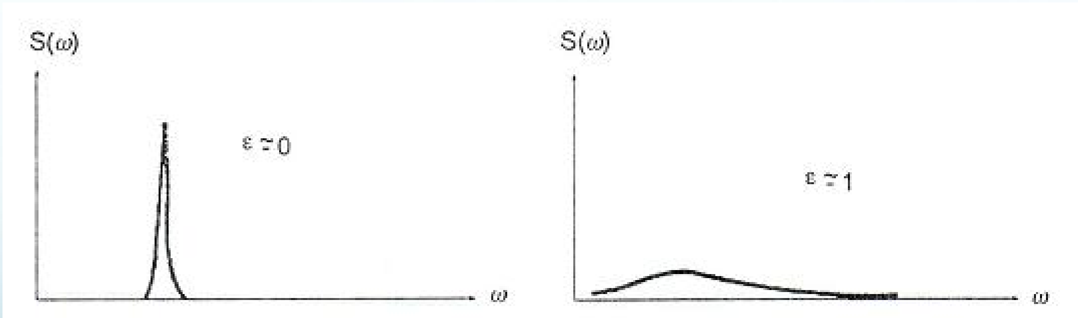
$$H_s = \sqrt{2} H_{rms}$$

combinando le equazioni si arriva alla definizione delle caratteristiche dell'onda in funzione di m_0 (altezza d'onda spettrale)

$$H_{m0} = 4\pm = 4\sqrt{m_0}$$

Gli spettri si distinguono a seconda dell’ampiezza dell’intervallo in cui variano le frequenze: spettri a banda stretta tipici delle onde in acque profonde, in cui la distribuzione delle frequenze è concentrata attorno la frequenza dominante, e spettri a banda larga caratteristici delle onde in acque basse, in cui l’intervallo delle frequenze è ampio.

Gli spettri, infatti, propagandosi da largo verso riva subiscono delle trasformazioni: a causa dell’interazione con il fondale subentrano delle non linearità nella distribuzione dell’energia sulle frequenze, che provocano un appiattimento dello spettro.

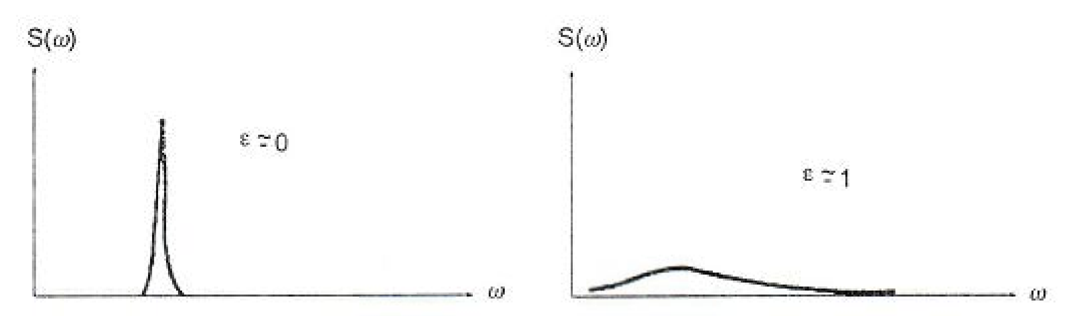


Gli indici di ampiezza spettrale possono essere espressi come:

$$\pounds_2 = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1}$$ (narrowness factor)

$$\pounds_4 = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}}$$ (broadness parameter),

Entrambi variabili fra 0 ed 1



$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{{m_2}^2}{m_0 m_4}}$$

Spettro a banda stretta $\quad \varepsilon \longrightarrow 0$

Spettro a banda larga $\quad \varepsilon \longrightarrow 1$

Distribuzione di Rayleigh $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{\varepsilon \cong 0}$

In acque profonde

$$H_s \cong H_{mo}$$

In acque basse

$$H_s > H_{mo}$$

$$T_m = T_z = 2\Pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}$$

$$T_s = 1{,}24 T_m$$

ANALISI SPETTRALE DIREZIONALE

Per avere una descrizione più dettagliata del moto ondoso, è necessario tenere conto del fatto che non tutte le onde si propagano nella stessa direzione.

Si definisce, quindi, lo spettro direzionale, funzione della frequenza e della direzione di propagazione.

Analogamente a quanto è stato detto per gli spettri monodirezionali si definiscono l'elevazione

$$\eta\ (x, y, t) = \sum a_j\ \cos(\omega_j t - \phi_j - k_j (x \cos\theta_j + y\ \mathrm{sen}\theta_j))$$

dove

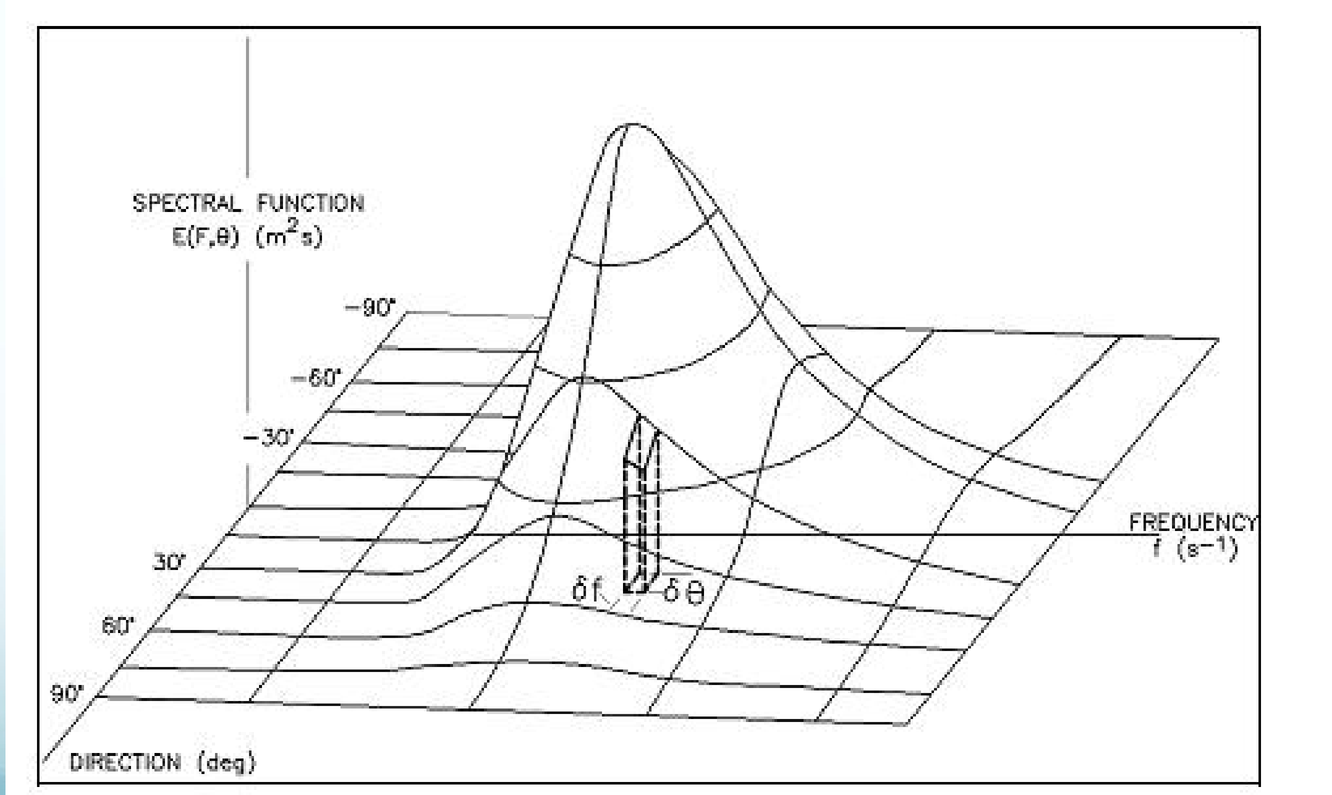
$k_j = 2\pi / L_j$ è la lunghezza d'onda della j-esima componente,

¤$_j$ è la fase della j-esima onda al tempo t=0,

_$_j$ è l'angolo tra l'asse delle x e la direzione di propagazione della j-esima componente lo spettro direzionale dell’energia

$$E(\mu,\text{¯}) = \int_0^{\infty}\int_0^{2\text{®}} E(\mu,\text{¯})\,d\mu\,d\text{¯}$$

con il quale è possibile identificare le frequenze e le direzioni prevalenti.



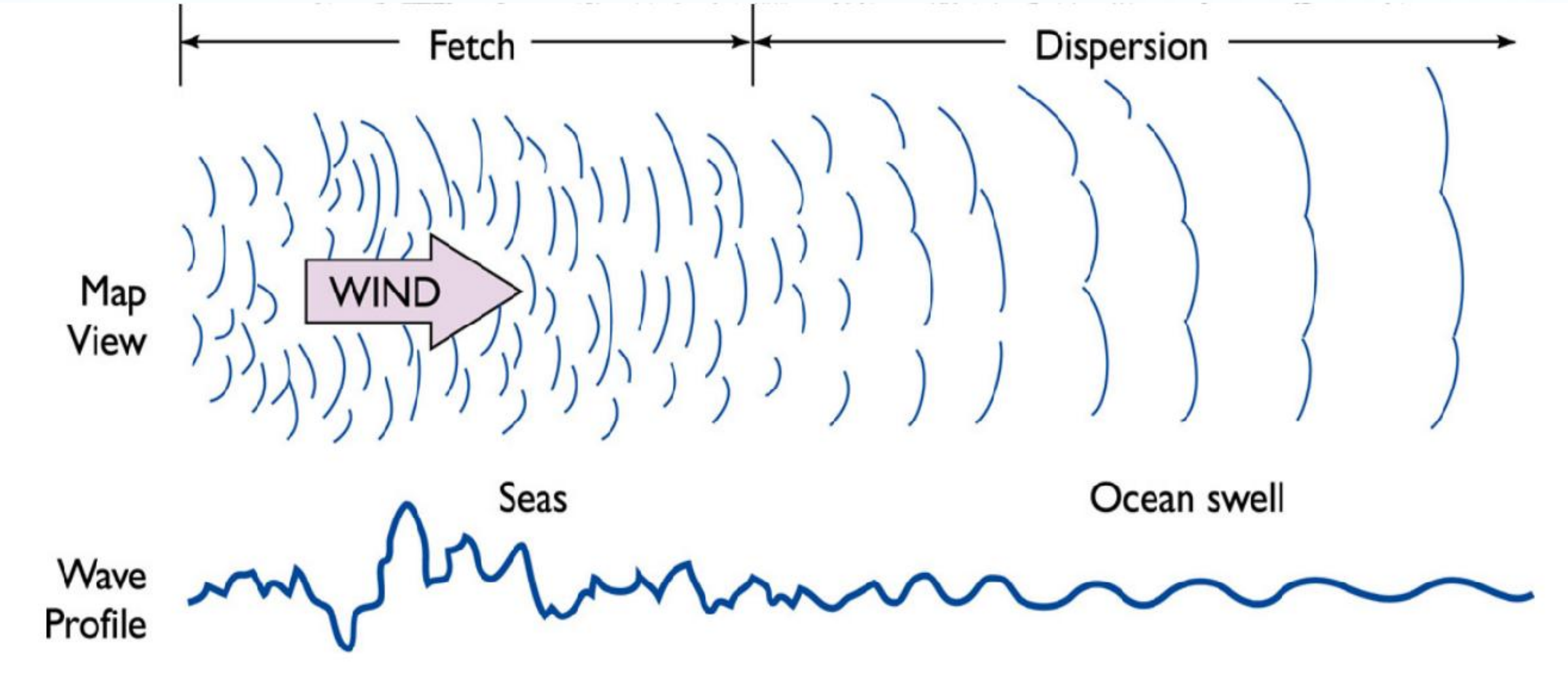
FORME SPETTRALI STANDARD

Lo spettro di energia può essere stimato, se sono disponibili le registrazioni del moto ondoso, dall'analisi delle elevazioni η della superficie del mare che si sono succedute durante la mareggiata, oppure, e questo è il metodo comunemente utilizzato nella pratica, facendo riferimento a forme standard ricavabili in funzione dei dati anemometrici.

In pratica si ipotizza che lo spettro abbia forma costante, e sia funzione della velocità del vento, della durata della perturbazione e della dimensione dell'area di generazione.

Le forme parametriche più note sono quelle di Pierson-Moskowitz e principalmente lo spettro JONSWAP (Joint North Sea Wave Project) conosciuto anche come TMA, proposto dopo una campagna di raccolta dati nel Mare del Nord che si adatta bene a descrivere il moto ondoso di mari non molto estesi come il Mediterraneo.

FORMAZIONE DELLE ONDE



L'ALTEZZA DELL'ONDA DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DEL VENTO (DURATA, VELOCITA' E DIREZIONE) E DALLE DIMENSIONI DEL FETCH

SPETTRO DI PIERSON-MOSKOWITZ

rappresentativo delle condizioni di mare completamente sviluppato, condizione che si verifica quando il vento soffia per un lungo periodo su un fetch (viene così chiamata l'area di generazione delle onde) molto esteso.

Le caratteristiche del moto ondoso dipendono solo dalla velocità del vento - Condizione tipica nei grandi mari.
L'energia E (ω) per ogni singola frequenza è espressa in funzione della sola velocità del vento

$$E(f) = \frac{\alpha g^2}{(2\pi)^4 f^5} exp\left[-\beta\left(\frac{f}{f_p}\right)^4\right]$$

dove α =0,0081 e =0,24 sono due costanti adimensionali,

$f_p = \frac{g}{2\pi U_w}$ con g accelerazione di gravità e U_w velocità del vento

SPETTRO JONSWAP

Lo spettro di un’onda in crescita nell’area di generazione, è stato proposto nell’ambito del progetto JONSWAP (1973), da Hasselman:

$$E(f) = \frac{\sim g^2}{(2\text{®})^4 f^5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^4\right] \cdot \text{¥}^{\exp\left[-(f-f_p)^2/(2\pm^2 f_p^2)\right]}$$

i parametri di cui lo spettro è funzione sono i seguenti:

- ~, la costante di Phillips, calcolata come

$$\sim\ = 0.076\left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{-0,22}$$

- f_p, la frequenza di picco (la frequenza a cui compete la massima energia),

$$f_p = \frac{3,5g}{U_{10}^2}\left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{-0,33}$$

- ¥ , il fattore di picco o coefficiente di amplificazione,

$$\text{¥} = 4.42\left(\frac{f_p U_{10}}{g}\right)^{3/7}$$

variabile tra 1 e 7 e non è costante durante lo sviluppo del moto ondoso.
Si può assumere un valore medio per regime stazionario:

γ = 3,3

γ = 1 $\longrightarrow$ JONSWAP ≡ Pierson-Moskowitz

- ±, il fattore di forma, che varia a seconda della frequenze

± = 0,07 per $f < f_p$

± = 0,09 per $f > f_p$.

- Spettro monodirezionale.
- Spettro unimodale: una sola frequenza di picco a cui è associata la massima energia.
- Concentrazione di energia attorno al picco di frequenza è maggiore rispetto al Pierson-Moskowitz

£$_4$=0,628   £$_2$ =0,329

$$m_o = \int_0^\infty E(f)df$$

$$H_{mo} = 4\sqrt{m_0}$$

$$\boldsymbol{T_p=1/f_p}$$