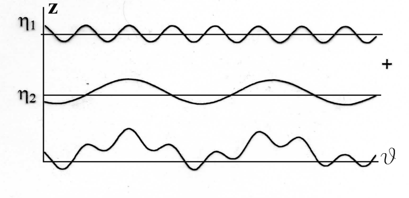
Sovrapposizione delle onde

Politenico di Bari

Corso di Costruzioni Marittime e Regime dei Litorali (12 CFU)

Anno Accademico 2013/2014

La sovrapposizione di due onde di piccola ampiezza é ancora un'onda di piccola ampiezza (vale la legge di sovrapposizione degli effetti).

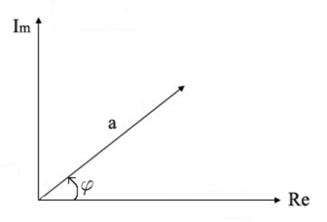


$$\boxed{\eta_1 + \eta_2 = \eta}$$

$$\boxed{\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi}$$

Rappresentazione vettoriale delle onde

L'onda puó essere rappresentata da un vettore di modulo *'a'* che ruota intorno all'origine del sistema di riferimento.



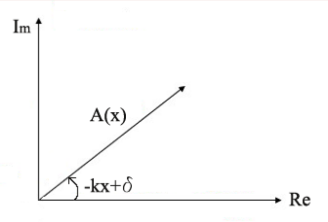
$$\eta = acos(\omega t - kx + \delta) = acos\varphi = Re\left\{ae^{i\varphi}\right\}$$

in cui δ rappresenta lo sfasamento costante nel tempo e nello spazio.
$e^{i\varphi} = cos\varphi + isen\varphi$

Rappresentazione vettoriale delle onde

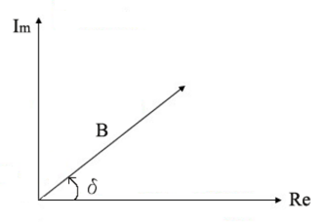
Se si vuole isolare la variazione nel tempo:

$$\eta = ae^{i(-kx+\delta)} = A(x)e^{i\omega t}$$



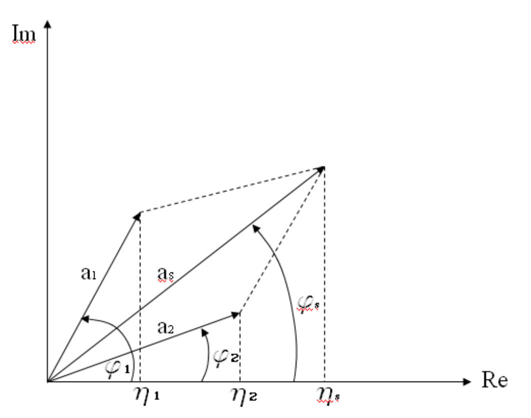
Se si vuole isolare la fase (rappresentazione di un'onda progressiva):

$$\eta = ae^{i\delta}e^{i(\omega t-kx)} = Be^{i(\omega t-KX)}$$



Rappresentazione vettoriale delle onde

$$\eta_1 + \eta_2 = a_1 cos\varphi_1 + a_2 cos\varphi_2 = a_s cos\varphi_s$$



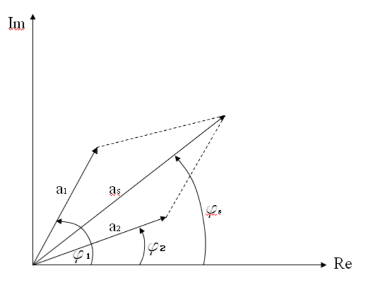
$$a_s = a_1 cos(\varphi_s - \varphi_1) + a_2 cos(\varphi_s - \varphi_2) \qquad tan\varphi_s = \frac{a_1 sen\varphi_1 + a_2 sen\varphi_2}{a_1 cos\varphi_1 + a cos\varphi_2}$$

Rappresentazione vettoriale delle onde

(1) ONDE CON UGUALE PERIODO E STESSA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

$(\omega t - kx)$ uguale per entrambe le onde $\Rightarrow$

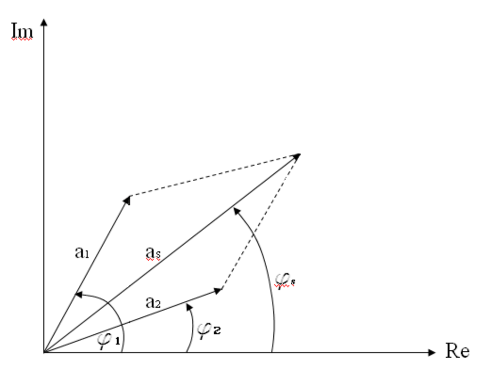
Due vettori che ruotano con la stessa velocitá e verso di rotazione:



$$\eta_s = a_1 e^{i(\omega t - kx)} e^{i(\delta_1)} + a_2 e^{i(\omega t - kx)} e^{i(\delta_2)} = a_s e^{i(\omega t - kx)} e^{i(\delta_s)}$$

Rappresentazione vettoriale delle onde

(1) ONDE CON UGUALE PERIODO E STESSA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE



$$a_s = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 cos(\delta_1 - \delta_2)} \qquad tg\delta_s = \frac{a_1 sen\delta_1 + a_2 sen\delta_2}{a_1 cos_1 + a_2 cos\delta_2}$$

Rappresentazione vettoriale delle onde

(2) ONDE CON UGUALE PERIODO E DIREZIONE DI PROPAGAZIONE OPPOSTA

Due onde rappresentate da vettori che ruotano in senso opposto con la stessa velocitá. Ipotizziamo $\delta_1 = \delta_2 = 0$

$$\begin{aligned}
\eta_s = a_1 cos(\omega t - kx) + a_2 cos(\omega t + kx) = \\
= a_1(cos(\omega t)cos(kx) + sen(\omega t)sen(kx)) + \\
+ a_2(cos(\omega t)cos(kx) - sen(\omega t)sen(kx)) = \\
= (a_1 + a_2)cos(\omega t)cos(kx) + (a_1 - a_2)sen(\omega t)sen(kx) = \\
= (a_1 + a_2)cos(\omega t)cos(kx) + (a_1 - a_2)[cos(\omega t - kx) - cos(\omega t)cos(kx)] = \\
= 2a_2 cos(\omega t)cos(kx) + (a_1 - a_2)cos(\omega t - kx)
\end{aligned}$$

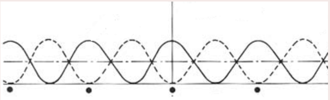
Rappresentazione vettoriale delle onde

(1) ONDA STAZIONARIA:

Esiste un valore di $x \ni' \eta = 0 \forall t$
Esiste un valore di $t \ni' \eta = 0 \forall x$

(2) ONDA PROGRESSIVA:

$\boxed{\text{Se } a_1 = a_2}$ $\Rightarrow$ Riflessione totale
L'onda é puramente stazionaria (CLAPOTIS)



$\boxed{\text{Se } a_1 > a_2}$ $\Rightarrow$ Riflessione parziale (Ampiezza max=$\pm(a_1 + a_2)$)

$$\eta_s = -2a_2 cos(\omega t) - (a_1 - a_2)cos(\omega t) = -(a_1 + a_2)cos(\omega t)$$

Gruppi d'onda

Consideriamo due onde con uguale ampiezza e periodo leggermente diverso:

$$\eta_1 = acos(\omega_1 t - K_1 x) \qquad \eta_2 = acos(\omega_2 t - K_2 x)$$

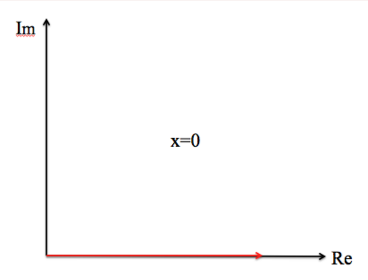
Ipotizziamo $T_1 < T_2 \quad \Rightarrow$

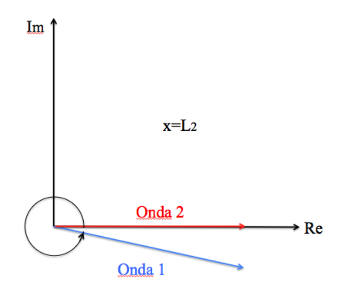
$$\Rightarrow L_1 < L_2;$$
$$\Rightarrow \omega_1 > \omega_2;$$
$$\Rightarrow K_1 > K_2;$$
$$\Rightarrow c_1 < c_2 \text{ (no acque basse)}$$

Gruppi d'onda

Argomenti qualitativi:

$t = 0$





$\eta_s = 2a$ $\eta_s < 2a$

Per alcuni valori di x i vettori sono opposti fra loro $\Rightarrow \eta_s = 0$

$$\left[cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Gruppi d'onda

$$\eta_s = 2a\ cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{K_1+K_2}{2}x\right) cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{K_1-K_2}{2}x\right)$$

Il primo termine rappresenta un'onda progressiva:

$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2T_1T_2}{T1_+T_2}$

$L_m = \frac{2\pi}{K_m} = \frac{2L_1L_2}{L_1+L_2}$

Con l'ipotesi $T_1 \cong T_2$:

$$\omega_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cong 0 \qquad K_g = \frac{K_1-K_2}{2} \cong 0$$

Il $cos(\omega_g\ t - K_g x)$ é una modulazione di ampiezza molto lenta.

Gruppi d'onda

$$c_g - c_m = \frac{\omega_g}{K_g} - \frac{\omega_m}{K_m} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 - K_2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{K_1 + K_2} =$$

$$= \frac{\cancel{\omega_1 K_1} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + \cancel{\omega_2 K_2} - \cancel{\omega_1 K_1} + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 + \cancel{\omega_2 K_2}}{K_1^2 - K_2^2} =$$

$$= 2\frac{\omega_1 K_2 - \omega_2 K_1}{K_1^2 - K_2^2} = 2\frac{c_1 K_1 K_2 - c_2 K_1 K_2}{K_1^2 - K_2^2}$$

$$(c_1 - c_2) K_1 K_2 < 0; \qquad K_1^2 - K_2^2 > 0 \qquad \Rightarrow$$

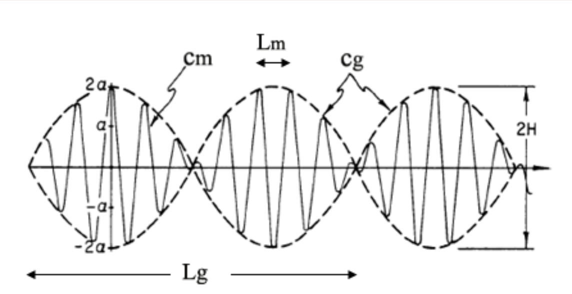
$$\Rightarrow \qquad \boxed{c_g < c_m}$$

La celeritá con cui si propaga la modulazione di ampiezza é minore dell'onda progressiva di periodo T_m $\Rightarrow$

Gruppi d'onda

$\Rightarrow$

- Il gruppo d'onda si muove piú lentamente delle singole componenti;
- L'onda ha un'ampiezza modulata pari a $\boxed{a\,cos(\omega_g\, t - k_g x)}$, periodo $\boxed{T_m}$ e lunghezza d'onda $\boxed{L_m}$



Gruppi d'onda

La definizione del **gruppo d'onda** é necessaria per lo studio della propagazione dell'energia.
Nella singola onda l'energia $E_k + E_p$ si mantiene costante perché H é costante.
Se l'onda é composta da piú onde semplici, $E_k + E_p$ é costante nell'intero gruppo d'onda e si propaga con la stessa celeritá di gruppo c_g.

$$c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 - K_2} = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dK_c}{dK} = c + K\frac{dc}{dK}$$

Gruppi d'onda

$$c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 - K_2} = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dK_c}{dK} = c + K\frac{dc}{dK}$$

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dK} = \frac{1}{2c}\frac{dc^2}{dK} = \frac{1}{2c}\frac{d}{dK}\left(\frac{g}{K}tgh(Kd)\right) = \\ = \frac{1}{2c}\left[-\frac{g}{K^2}tgh(Kd) + \frac{g}{K}\frac{d}{cosh^2(Kd)}\right] = \\ = \frac{1}{2c}\left[\frac{g}{K^2}tgh(Kd)\left(-1+\frac{Kd}{cosh(Kd)senh(Kd)}\right)\right] = \\ = \frac{1}{2\cancel{c}}\left[\frac{c^{\cancel{2}}}{K}\left(-1+\boxed{\frac{2Kd}{senh(2Kd)}}\right)\right]\end{aligned}$$

Gruppi d'onda

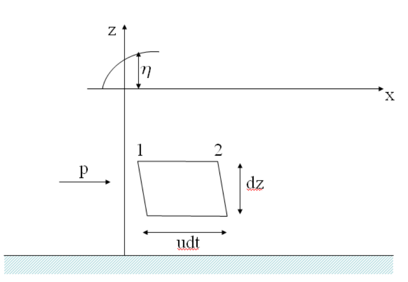
$\boxed{\frac{2Kd}{senh(2Kd)}}$ rappresenta la **funzione di dispersione G**

$$c_g = c + \frac{1}{2}c(-1 + G) = \frac{c}{2}(1 + G)$$

$$G_o = 0 \Rightarrow c_{go} = \frac{c}{2}$$

$$G_s = 1 \Rightarrow c_{gs} = c$$

Propagazione dell'energia



Il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare l'elemento dz dalla posizione 1 alla posizione 2:

(1) $\boxed{pdz \cdot udt}$

Il volume $udtdz = 1$ possiede un'energia pari:

(2) $\boxed{\left[\rho g z + \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)\right] udtdz}$

Propagazione dell'energia

dove: $\rho g z = E_p$ e $\frac{1}{2}\rho(u^2+w^2) = E_k$
Il flusso di energia istantaneo attraverso una sezione di riferimento:

$$E_f(t) = \int_{-d}^{\eta} \frac{(1)+(2)}{dt}\,dz = \int_{-d}^{\eta}\left[p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho(u^2+w^2)\right] u\,dz$$

$$= \int_{-d}^{0} p^{+} u\,dz = \int_{-d}^{0} \rho g \frac{H}{2}\frac{coshK(d+z)}{cosh(Kd)}\frac{\pi H}{T}\frac{coshK(d+z)}{senh(Kd)} cos^2\theta\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{T}\rho g \frac{H^2}{2}\frac{cos^2\theta}{senh(Kd)cosh(Kd)}\int_{-d}^{0} cosh^2 K(d+z)\,dz =$$

$$= \frac{\omega}{4}\rho g H^2 \frac{cos^2\theta}{\frac{senh(2Kd)}{2}} int_{-d}^{0}\frac{1}{2}[1 + cosh2K(d+z)]\,dz =$$

$$= \frac{\omega}{2}\rho g H^2 \frac{cos^2\theta}{senh(2Kd)}\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2K}senh2K(d+z)\right)\right]_{-d}^{0} =$$

Propagazione dell'energia

$$= \frac{\omega}{4}\rho g H^2 \frac{cos^2\theta}{senh(2Kd)}\left(d + \frac{1}{2K} senh(2Kd)\right) =$$

$$= \frac{\omega}{k}\frac{1}{8}\rho g H^2\left(\frac{2Kd}{senh(2Kd)} + 1\right)^{cos^2\theta} =$$

$$= c\frac{1}{8}\rho g H^2 (1 + G) cos^2\theta$$

Considerando che $\overline{cos^2\theta} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad E_f = \tfrac{1}{8}\rho g H^2 \tfrac{c}{2}(1 + G) = Ec_g$$

Formule riassuntive

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} tgh(kd)$$

$$c = \frac{L}{T} = \frac{g}{\omega} tgh(kd) = \sqrt{\frac{g}{k} tgh(kd)}$$

$$c_g = \frac{c}{2}(1+G) = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2kd}{senh(2kd)}\right)$$

$$E = E_p + E_k = \rho g \frac{H^2}{8}$$

$$E_f = E c_g$$